به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

فرایندهای تصادفی
پاییز 1404
حمیدرضا ربیعی

1. پاسخ کوتاه (15 نمره) :

(a) چطور ممکن است یک فرایند دارای تابع خودهمبستگی‌ای باشد که تنها به اختلاف زمانی وابسته است [1]، اما همچنان توزیع‌های توأم مرتبه بالاتر آن غیرایستا باشند؟

(b) چرا ممکن است دو فرایند در هر لحظه دارای توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای [2] یکسان باشند، اما همچنان به صورت **توأم ایستا** [3] نباشند؟

(c) چگونه کوواریانس متقابل [4] بین دو فرایند می‌تواند غیرایستا بودن را آشکار کند؟ چرا این مورد از طریق خودهمبستگی‌های [5] آنها قابل مشاهده نیست؟

2. (20 نمره) فرض کنید سیگنال تصادفی $X(t)$ یک فرایند گاوسی ایستا با میانگین μ_X و واریانس σ_X^2 است. این سیگنال وارد یک سیستم خطی می‌شود که خروجی‌های آن در دو لحظه زمانی متفاوت به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$Y(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) X(t_1 - \tau)\, d\tau, \quad Z(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(u) X(t_2 - u)\, du.$$

(a) توزیع احتمال توأم [6] متغیرهای تصادفی $Y(t_1)$ و $Z(t_2)$ را به دست آورید.

(b) چه شرطی لازم است تا دو خروجی $Y(t_1)$ و $Z(t_2)$ از یکدیگر **مستقل** باشند؟

3. (20 نمره) فرآیند $X(t)$ که تابع خود همبستگی آن برابر $R(t,\tau) = \mathbb{E}[X(t)X(t+\tau)]$ است را تقریبا ایستا ضعیف [7] می‌نامیم، اگر برای هر t_1 و t_2 داشته باشیم: $\lim_{t\to\infty} R(t_1+t,\tau) - R(t_2+t,\tau)$

$\{W(n); n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ یک فرآیند تصادفی گسسته است به طوری که ... $W(0), W(1),$ دنباله‌ای از متغیرهای iid با توزیع $W(n) \sim N(0,\sigma^2)$ است. فرآیند $X(n)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم که در آن $0 \le \alpha < 1$ است:

$$X(n+1) = \alpha X(n) + W(n); n \in \mathbb{Z}, X(0) = 0$$

نشان دهید فرآیند $X(n)$ یک فرآیند گاوسی و تقریبا ایستا ضعیف است.

4. (20 نمره) فرایندهای تصادفی ایستا ضعیف توام $V(t)$ و $U(t)$ با میانگین صفر را در نظر بگیرید. $\hat{V}(t)$ را به صورت تعریف کنیم:

$$\hat{V}_t = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) U(t-\theta)\, d\theta$$

می‌دانیم برای هر s و t، تساوی $E[(V(t) - \hat{V}(t))U(s)] = 0$ برقرار است.

[1] WSS
[2] Marginal PDFs
[3] Jointly Stationary
[4] Cross Covariance
[5] Auto Correlation
[6] Joint Probability Distribution
[7] WSS

(a) نشان دهید $S_{VU}(\omega) - S_{UU}(\omega)H(\omega) = 0$.

(b) ثابت کنید $E[|V_t - \hat{V}_t|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{VV}(\omega) - \frac{|S_{VU}(\omega)|^2}{S_{UU}(\omega)} d\omega$.

5. (35 نمره) یک فرآیند پواسن با پارامتر λ مانند $N(t)$ فرض کنید. همچنین فرآیند گاوسی مستقل $X(t)$ با تابع میانگین $\mu(t)$ و هسته $k(t,s)$ را در نظر بگیرید. فرآیند نقطه‌ای جدید $N_2(t)$ را در نظر بگیرید که در نقاط فرآیند $N(t)$ به احتمال $\frac{1}{3}$ یک ضربه در تمامی نقاط اندیس ایجاد می‌کند. یک ضربه در لحظه t_0 در هر نقاط بعد از t_0 مانند t ضربه با مقدار $X(t_0)e^{-\theta(t-t_0)}$ ایجاد می‌کند. همچنین مجموع ضربه‌های اعمال‌شده در نقطه t را با $D(t)$ نشان می‌دهیم.

(a) فرض کنید $\mu_X(t) = \mu$ و ثابت است. همچنین $k(s,t) = e^{-\theta|t-s|}$ مقدار امیدریاضی و واریانس $D(T)$ را محاسبه کنید.

(b) فرض کنید $\phi(t) = e^{-\theta t}\Phi(t)$, $\mu(t) = e^{-\theta t}t$ که $\Phi = \left[a_0, a_1 t, ..., a_K t^K\right]^T$ و $\phi(t)$ بردار ویژگی متناظر با تابع هسته $k(t,s)$ است. فرض کنید تا لحظه T دقیقا n ضربه ایجاد شده است و زمان های این n ضربه $t_1, ..., t_n$ هستند. ابتدا برای $K = 1$ توزیع $f(t_1 + ... + t_n|D(T))$ را محاسبه کنید. سپس نشان دهید اگر $M_i = \sum_{j=1}^{n} t_j^i$ ، مقدار توزیع $f(t_1, ..., t_n|D(T))$ با داشتن $M_1, ..., M_k$ به طور یکتا تعیین می‌شود.

1. (a) **ایستایی ضعیف (WSS) در مقابل ایستایی قوی (SSS):** یک فرایند تصادفی $X(t)$ را ایستای ضعیف (WSS) می‌گوییم اگر میانگین آن ثابت باشد و خودهمبستگی آن تنها به اختلاف زمانی τ وابسته باشد: $E[X(t)X(t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$.
با این حال، ایستایی قوی (SSS) نیازمند آن است که تمام توزیع‌های احتمال توأم مرتبه بالاتر نسبت به شیفت زمانی تغییر نکنند. ممکن است یک فرایند WSS باشد اما SSS نباشد (اگر غیر گاوسی باشد). برای مثال، گشتاور مرتبه سوم ممکن است به زمان مطلق t وابسته باشد:

$$E[X(t)X(t+\tau_1)X(t+\tau_2)] \neq E[X(t+\Delta)X(t+\tau_1+\Delta)X(t+\tau_2+\Delta)].$$

در چنین حالتی، آماره‌های «مرتبه دوم» نشان‌دهنده ایستایی هستند، اما آماره‌های مرتبه بالاتر (که شکل کامل توزیع در طول زمان را توصیف می‌کنند) رفتار غیرایستا را آشکار می‌سازند.

(b) **توزیع‌های حاشیه‌ای در مقابل توزیع‌های توأم:** ایستایی حاشیه‌ای به این معنی است که خواص آماری $X(t)$ و $Y(t)$ به صورت جداگانه با زمان تغییر نمی‌کند. یعنی $f_X(x;t) = f_X(x)$ و $f_Y(y;t) = f_Y(y)$ برای تمام tها.
با این حال، ایستایی توأم نیازمند آن است که رابطه بین دو فرایند در طول زمان ثابت بماند. دو فرایند می‌توانند به صورت حاشیه‌ای ایستا باشند اما به صورت توأم ایستا نباشند اگر ساختار وابستگی آنها تغییر کند.
از نظر ریاضی، برای ایستایی توأم، PDF توأم باید در رابطه زیر صدق کند:

$$f_{X,Y}(x,y;t_1,t_2) = f_{X,Y}(x,y;t_1+\Delta,t_2+\Delta).$$

اگر ضریب همبستگی $\rho_{XY}(t)$ با زمان تغییر کند (مثلاً دو فرایند در $t=0$ همبستگی قوی داشته باشند اما در $t=100$ مستقل شوند)، آنها ایستای توأم نیستند، حتی اگر توزیع‌های حاشیه‌ای انفرادی آنها در هر لحظه یکسان باقی بماند.

(c) **کوواریانس متقابل و ایستایی توأم:** توابع خودهمبستگی انفرادی $R_{XX}(\tau)$ و $R_{YY}(\tau)$ تنها خود-تشابهی $X(t)$ و $Y(t)$ را به صورت جداگانه توصیف می‌کنند. اگر هر دو فرایند به تنهایی WSS باشند، این توابع تنها به تاخیر زمانی τ بستگی دارند.
با این حال، تابع کوواریانس متقابل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{XY}(t,t+\tau) = E[(X(t)-\mu_X)(Y(t+\tau)-\mu_Y)].$$

دو فرایند تنها زمانی توأماً WSS هستند که این کوواریانس متقابل منحصراً به τ وابسته باشد. ممکن است سیستمی داشته باشیم که در آن «جفت‌شدگی» یا تاخیر بین دو فرایند پایدار، در طول زمان دچار لغزش شود.
برای مثال، اگر $Y(t) = X(t - D(t))$ باشد که در آن تاخیر $D(t)$ با زمان تغییر می‌کند، X و Y ممکن است به صورت انفرادی ایستا باقی بمانند، اما $C_{XY}(t,t+\tau)$ با تغییر $D(t)$ تغییر خواهد کرد که نشان‌دهنده غیرایستا بودن سیستم توأم است.

2. (a) **تابع چگالی احتمال توأم:** چون $X(t)$ یک فرایند تصادفی گاوسی ایستا است، خروجی‌های $Y(t_1)$ و $Z(t_2)$ (که تبدیلات خطی X هستند) نیز متغیرهای تصادفی گاوسی توأم (Jointly Gaussian) می‌باشند. بنابراین، برای تعیین تابع چگالی احتمال توأم آنها، کافی است میانگین‌ها، واریانس‌ها و کوواریانس آنها را محاسبه کنیم.
میانگین خروجی‌ها:

$$\mu_{Y_1} = E[Y(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)\mu_X \, d\tau = H_1(0)\mu_X,$$

$$\mu_{Z_2} = E[Z(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(u)\mu_X \, du = H_2(0)\mu_X,$$

که در آن تعریف می‌کنیم $H_1(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)\, d\tau$ و $H_2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(u)\, du$.
واریانس خروجی‌ها:

$$\sigma_{Y_1}^2 = E[(Y(t_1)-\mu_{Y_1})^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C_X(\tau-u)h_1(\tau)h_1(u)\, d\tau\, du$$

$$\sigma_{Z_2}^2 = E[(Z(t_2) - \mu_{Z_2})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_X(\tau - u) h_2(\tau) h_2(u) \, d\tau \, du$$

کوواریانس بین دو خروجی:

$$Cov[Y(t_1), Z(t_2)] = E[(Y(t_1) - \mu_{Y_1})(Z(t_2) - \mu_{Z_2})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_X(t_1 - t_2 - \tau + u) h_1(\tau) h_2(u) \, d\tau \, du$$

در نتیجه، تابع چگالی احتمال توأم $f_{Y(t_1),Z(t_2)}(y,z)$ به صورت زیر است:

$$f_{Y,Z}(y,z) = \frac{1}{2\pi \sigma_{Y_1} \sigma_{Z_2} \sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{y - \mu_{Y_1}}{\sigma_{Y_1}} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{y - \mu_{Y_1}}{\sigma_{Y_1}} \right) \left(\frac{z - \mu_{Z_2}}{\sigma_{Z_2}} \right) + \left(\frac{z - \mu_{Z_2}}{\sigma_{Z_2}} \right)^2 \right] \right)$$

که در آن ضریب همبستگی ρ برابر است با:

$$\rho = \frac{Cov[Y(t_1), Z(t_2)]}{\sigma_{Y_1} \sigma_{Z_2}}.$$

(b) **شرط لازم و کافی برای استقلال آماری:** از آنجا که متغیرهای تصادفی $Y(t_1)$ و $Z(t_2)$ گاوسی توأم هستند، اگر همبستگی بین آنها صفر باشد (یعنی کوواریانس صفر شود)، آنها از نظر آماری مستقل نیز خواهند بود.

$$Y(t_1) \text{ و} Z(t_2) \text{ مستقل هستند} \iff Cov[Y(t_1), Z(t_2)] = 0.$$

بر اساس رابطه کوواریانس محاسبه شده در بالا، شرط لازم و کافی برای استقلال عبارت است از:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_X(t_1 - t_2 - \tau + u) h_1(\tau) h_2(u) \, d\tau \, du = 0.$$

3. **جواب:**

$$X(n+1) = \alpha X(n) + W(n) = \alpha(\alpha X(n-1) + W(n-1)) + W(n) = \alpha^{n+1} X(0) + \sum_{i=1}^{n} \alpha^i W(n-i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i W(n-i)$$

ترکیب خطی فرآیندهای گاوسی، گاوسی است.

$$R(t,\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[\sum_{i=1}^{t-1} \alpha^i W(t-1-i) \sum_{j=1}^{t+\tau-1} \alpha^j W(t+\tau-1-j)$$

(با توجه به مستقل بودن $W(i)$ها)

$$= E[\sum_{i=1}^{t-1} \alpha^{2i} W^2(t-1-i)]$$

همچنین:

$$E[W^2(t)] = Var(W(t)) + E^2(W(t) = \sigma^2 + 0 = \sigma^2$$

پس:

$$R(t,\tau) = \sum_{i=1}^{t-1} \alpha^{2i} E[W^2(t-1-i)] = \sum_{i=1}^{t-1} \alpha^{2i} \sigma^2 = \sigma^2 \frac{1-\alpha^{2t}}{1-\alpha^2}$$

حال برای بررسی تقریبا WSS بودن:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\Big(R(t_1+t,\tau)-R(t_2+t,\tau)\Big) &= \lim_{t\to\infty}\left(\sigma^2\frac{1-\alpha^{2(t+t_1)}}{1-\alpha^2}-\sigma^2\frac{1-\alpha^{2(t+t_2)}}{1-\alpha^2}\right)\\ &= \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\lim_{t\to\infty}\Big(\alpha^{2(t+t_2)}-\alpha^{2(t+t_1)}\Big)\\ &= \frac{\sigma^2(\alpha^{2t_2}-\alpha^{2t_1})}{1-\alpha^2}\lim_{t\to\infty}\alpha^{2t}\\ &= 0\end{aligned}$$

پس با توجه به $0<\alpha<1$ مقدار حد برابر ۰ است.

4. **اثبات تساوی:**

(a)

$$E[(V(t)-\hat{V}(t))U(s)] = R_{VU}(t-s)-\int_{-\infty}^{\infty}h(\theta)\,R_{UU}(t-s-\theta)\,d\theta.$$

چون دو طرف برای همه $\tau=t-s$ صفر است:

$$R_{VU}(\tau)=(h*R_{UU})(\tau).$$

تبدیل فوریه:

$$S_{VU}(\omega)=H(\omega)S_{UU}(\omega).$$

یا:

$$S_{VU}(\omega)-S_{UU}(\omega)H(\omega)=0.$$

(b) **اثبات رابطه توان خطا:**

$$E\left[|V(t)-\hat{V}(t)|^2\right]=R_{VV}(0)+R_{\hat{V}\hat{V}}(0)-2R_{V\hat{V}}(0).$$

با استفاده از روابط طیفی:

$$R_{VV}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{VV}(\omega)\,d\omega,$$

$$R_{\hat{V}\hat{V}}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{UU}(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega,$$

$$R_{V\hat{V}}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{VU}(\omega)\,H(\omega)\,d\omega.$$

و چون در بخش قبل نشان دادیم:

$$H(\omega)=\frac{S_{VU}(\omega)}{S_{UU}(\omega)},$$

جایگذاری می‌شود:

$$E\left[|V(t)-\hat{V}(t)|^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_{VV}(\omega)-\frac{|S_{VU}(\omega)|^2}{S_{UU}(\omega)}\right]d\omega.$$

که همان مطلوب است.

5. (a) نقاط ضربه از فرآیند پواسن با پارامتر $\frac{\lambda}{3}$ می‌آیند. حال برای نقطه دلخواه T سعی می‌کنیم در مورد توزیع $D(T)$ اطلاعات بدست آوریم. ابتدا سعی می‌کنیم در صورت داشتن نقاط ضربه تا لحظه T توزیع $D(T)|t_1,t_2,...,t_n$ را بدست آوریم. دقت کنید که در میزان ضربه وارده از نقطه t_i به نقطه T برابر با $X(t_i)e^{-\theta(T-t_i)}$ می‌باشد. در نتیجه

$$D(T)|t_1,...,t_n=e^{-\theta T}\sum_{i=1}^{n}X(t_i)e^{\theta t_i} \tag{1}$$

با توجه به این که $X(t)$ یک فرآیند گاوسی است در نتیجه $X(t_i)$ها توآمان گاوسی هستند و $D(T)$ که ترکیب خطی آن‌هاست یک متغیر گاوسی می‌شود.

$$D(T)|t_1,...,t_n\sim\mathcal{N}\left(\mu e^{-\theta T}\sum_{i=1}^{n}e^{\theta t_i},e^{-2\theta T}\sum_{i,j}e^{\theta(t_i+t_j)}e^{-\theta|t_i-t_j|}\right) \tag{2}$$

ابتدا امیدریاضی را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[D(T)]&=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[D(T)|t_1,t_2,....,t_n;N(T)=n\right]\right]\\&=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mu e^{-\theta T}\sum_{i=1}^{n}e^{\theta t_i}|t_1,t_2,....,t_n;N(T)=n\right]\right]\end{aligned}$$

چون فرآیند $N_2(t)$ پواسن است، به شرط $N(T)=n$ توزیع $t_1,...,t_n$ (به صورت نامرتب) یکنواخت است. در نتیجه:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[D(T)]&=\mu e^{-\theta T}\mathbb{E}\left[n\mathbb{E}_{t\sim U(0,T)}\left[e^{\theta t}\right]\right]=\mu e^{-\theta T}\mathbb{E}\left[n\frac{1}{\theta}\left(e^{\theta T}-1\right)\right]\\&=\mu e^{-\theta T}\frac{1}{\theta}\left(e^{\theta T}-1\right)\mathbb{E}\left[n\right]=\mu e^{-\theta T}\frac{1}{\theta}\left(e^{\theta T}-1\right)\frac{\lambda}{3}T=\frac{\lambda\mu T}{3\theta}\left(1-e^{-\theta T}\right)\end{aligned}$$

حال سعی می‌کنیم واریانس را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(D(T))&=\mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left[D(T)|t_1,t_2,....,t_n;N(T)=n\right]\right)+\mathbb{E}\left[\mathbb{V}\left(D(T)|t_1,t_2,....,t_n;N(T)=n\right)\right]\\&=\mathbb{V}\left(\mu e^{-\theta T}\sum_{i=1}^{n}e^{\theta t_i}\right)+\mathbb{E}\left[e^{-2\theta T}\sum_{i,j}e^{\theta(t_i+t_j)}e^{-\theta|t_i-t_j|}\right]\end{aligned}$$

با توجه به این که $\theta(t_i+t_j)-\theta|t_i-t_j|=2\theta\min(t_i,t_j)$ جمله دوم به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-2\theta T}\sum_{i,j}e^{\theta(t_i+t_j)}e^{-\theta|t_i-t_j|}\right]&=\mathbb{E}\left[e^{-2\theta T}\sum_{i,j}e^{2\theta\min(t_i,t_j)}\right]\\&=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{-2\theta T}\sum_{i,j}e^{2\theta\min(t_i,t_j)}|N(T)=n\right]\right]\\&=e^{-2\theta T}\mathbb{E}\left[N(T)\mathbb{E}\left[e^{2\theta t}\right]+N(T)(N(T)-1)\mathbb{E}\left[e^{2\theta\min(t,s)}\right]\right]\\&=e^{-2\theta T}\left(\mathbb{E}\left[N(T)\right]\mathbb{E}\left[e^{2\theta t}\right]+\mathbb{E}\left[N(T)(N(T)-1)\right]\mathbb{E}\left[e^{2\theta\min(t,s)}\right]\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{2\theta t}\right] &= \frac{1}{2\theta}\left(e^{2\theta T}-1\right) \\
\mathbb{E}\left[e^{2\theta \min(t,s)}\right] &= \int_0^T\int_0^T e^{2\theta\min(t,s)}dtds = \int_0^T\left(\int_0^s e^{2\theta t}dt + \int_s^T e^{2\theta s}dt\right)ds \\
&= \int_0^T\left(\frac{1}{2\theta}(e^{2\theta s}-1)+(T-s)e^{2\theta s}\right)ds \\
&= \frac{\frac{1}{2\theta}+T}{2\theta}(e^{2\theta T}-1) - \frac{T}{2\theta} - \int_0^T se^{2\theta s}ds \\
\mathbb{E}[N(T)] &= \frac{\lambda T}{3} \\
\mathbb{E}[N(T)(N(T)-1)] &= \mathbb{E}[N(T)^2]-\mathbb{E}[N(T)] = \frac{\lambda}{3}T+(\frac{\lambda}{3}T)^2-\frac{\lambda}{3}T = \frac{1}{9}\lambda^2T^2
\end{aligned}
$$

حال به محاسبه جمله اول می‌پردازیم.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\mu e^{-\theta T}\sum_{i=1}^n e^{\theta t_i}\right) &= \mu^2 e^{-2\theta T}\left(\mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n e^{\theta t_i}|N(T)=n\right]\right)+\mathbb{E}\left[\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n e^{\theta t_i}|N(T)=n\right)\right]\right) \\
&= \mu^2e^{-2\theta T}\left(\mathbb{V}\left(N(T)\mathbb{E}\left[e^{\theta t}\right]\right)+\mathbb{E}\left[N(T)\mathbb{V}\left(e^{\theta t}\right)\right]\right) \\
&= \mu^2e^{-2\theta T}\left(\mathbb{V}(N(T))\mathbb{E}\left[e^{\theta t}\right]^2+\mathbb{E}[N(T)]\mathbb{V}\left(e^{\theta t}\right)\right) \\
&= \mu^2e^{-2\theta T}\left(\frac{\lambda}{3}\mathbb{E}\left[e^{\theta t}\right]^2+\frac{\lambda}{3}\mathbb{V}\left(e^{\theta t}\right)\right) \\
&= \frac{\lambda\mu^2e^{-2\theta T}}{3}\left(\mathbb{E}\left[e^{\theta t}\right]^2+\mathbb{V}\left(e^{\theta t}\right)\right) \\
&= \frac{\lambda\mu^2e^{-2\theta T}}{3}\mathbb{E}\left[e^{2\theta t}\right] = \frac{\lambda\mu^2}{6\theta}\left(1-e^{-2\theta T}\right)
\end{aligned}
$$

(b) با توجه قسمت قبل توزیع شرطی $D(T)$ را داریم،

$$
D(T)|t_1,...,t_n \sim \mathcal{N}\left(e^{-\theta T}\sum_{i=1}^n \mu(t_i)e^{\theta t_i}, e^{-2\theta T}\sum_{i,j}e^{\theta(t_i+t_j)}k(t_i,t_j)\right) \tag{3}
$$

با توجه به فرض‌های مسئله داریم،

$$
D(T)|t_1,...,t_n \sim \mathcal{N}\left(e^{-\theta T}\sum_{i=1}^n t_i, e^{-2\theta T}\sum_{i,j}\Phi(t_i)^T\Phi(t_j)\right)
$$

حال داریم:

$$
\begin{aligned}
f(t_1,...,t_n|D(T)=d;N(T)=n) &\propto f(D(T)=d|t_1,...,t_n;N(T)=n)\cdot f(t_1,...,t_n|N(T)=n) \\
&= f(D(T)=d|t_1,...,t_n;N(T)=n)\frac{n!}{T^n} \\
\rightarrow f(t_1,...,t_n|D(T)=d;N(T)=n) &\propto f(D(T)=d|t_1,...,t_n;N(T)=n)
\end{aligned}
$$

در صورتی که $K=1$

$$
D(T)|t_1,...,t_n \sim \mathcal{N}\left(e^{-\theta T}\sum_{i=1}^n t_i, e^{-2\theta T}n^2\right)
$$

در نتیجه توزیع $t_1,...,t_n|D(T)$ تنها به مقدار $t_1+...+t_n$ وابسته است. بنابراین

$$
Y = t_1+...+t_n
$$

$$
f_Y(y|D(T)=d;N(T)=n) = \frac{e^{\theta T}}{\sqrt{2\pi}n}\exp\left(\frac{e^{2\theta T}\left(d-e^{-\theta T}y\right)^2}{2n^2}\right) = \frac{e^{\theta T}}{\sqrt{2\pi}n}\exp\left(\frac{\left(y-e^{\theta T}d\right)^2}{2n^2}\right)
$$

در نتیجه

$$y|D(T)=d;N(T)=n\sim\mathcal{N}\left(e^{\theta T}d,n^2\right)$$

همچنین برای سوال دوم داریم:

$$D(T)|t_1,...,t_n\sim\mathcal{N}\left(e^{-\theta T}\sum_{i=1}^{n}t_i,e^{-2\theta T}\sum_{i,j}\sum_{k=1}^{K}a_k^2t_i^kt_j^k\right)$$

داریم،

$$e^{-2\theta T}\sum_{i,j}\sum_{k=1}^{K}a_k^2t_i^kt_j^k=e^{-2\theta T}\sum_{k=1}^{K}a_k^2\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^k\right)^2=e^{-2\theta T}\sum_{k=1}^{K}a_k^2M_k^2$$

در نتیجه

$$D(T)|t_1,...,t_n\sim\mathcal{N}\left(e^{-\theta T}M_1,e^{-2\theta T}\sum_{k=1}^{K}a_k^2M_k^2\right)$$

همانطور که نشان دادیم داریم،

$$f(t_1,...,t_n|D(T)=d;N(T)=n)\propto f(D(T)=d|t_1,...,t_n;N(T)=n)$$

و در نتیجه می‌بینیم که مقدار توزیع $t_1,...,t_n|D(T)=d;N(T)=n$ به صورت یکتا از روی $M_1,...,M_k$ بدست می‌آید.