به نام خدا

دانشکده مهندسی کامپیوتر

فرآیندهای تصادفی
نیم‌سال اول ۱۴۰۴-۱۴۰۵
دکتر ربیعی

۱۴۰۴/۱۱/۲۱ — امتحان پایان‌ترم — زمان امتحان : ۱۵۰ دقیقه

۱. برای بررسی یک فرضیه از آزمون Z و پارامترهای $\alpha = 0.04$ و $\sigma^2 = 16$ استفاده می‌کنیم. به این منظور از $n = 400$ نمونه استفاده می‌کنیم. درستی یا نادرستی هرکدام از موارد زیر را مشخص کنید.
الف)(۲نمره) با افزایش مقدار α احتمال اینکه فرضیه‌های اشتباه را رد کنیم، افزایش پیدا می‌کند.
ب)(۲نمره) در صورتی که مقدار α را افزایش دهیم، احتمال اینکه فرضیه‌ی درست، به اشتباه رد شود، افزایش پیدا می‌کند.
ج)(۲نمره) احتمال اینکه فرضیه‌ی درست $\mu \leq 100$ به اشتباه رد شود، نصف احتمال این است که فرضیه‌ی درست $\mu = 100$ به اشتباه رد شود.
د)(۲نمره) در صورتی که تعداد نمونه‌ها را ۱۰ برابر کنیم اما میانگین آن‌ها تغییری نکند، احتمال اینکه فرضیه‌ی درست $\mu = 100$ به اشتباه رد شود، کاهش پیدا می‌کند.
ه)(۲نمره) در صورتی که بدانیم واریانس داده‌ها $\sigma^2 = 25$ بوده، احتمال اینکه فرضیه‌ی درست، به اشتباه رد شود، کاهش می‌یابد.

پاسخ

درست: پارامتر آلفا نشان‌دهنده این است که چقدر احتمال دارد با وجود درست بودن فرضیه، رد شود. با افزایش این پارامتر خطای نوع دوم یعنی احتمال رد نشدن فرضیه‌های اشتباه کاهش می‌یابد. بنابراین احتمال اینکه فرضیه اشتباه را رد کنیم، افزایش می‌یابد.
درست: با توجه به تعریف پارامتر آلفا، این مورد صحیح است.
نادرست: با توجه به اینکه در هر دو حالت one tail و two tail مقدار آلفا یکسان است، احتمال رد شدن فرصیه درست در هر دو حالت یکسان است.
نادرست: با افزایش تعداد نمونه‌ها، متغیر s کاهش می‌یابد. بنابراین در صورتی که میانگین نمونه‌ها ثابت بماند، احتمال اینکه در ناحیه بحرانی قرار بگیرد افزایش می‌یابد. بنابراین احتمال رد شدن فرضیه درست افزایش می‌یابد.
درست: اگر مقدار واریانس افزایش یابد، متغیر s نیز افزایش می‌یابد. بنابراین به ازای مقادیر یکسان میانگین، احتمال اینکه در ناحیه بحرانی که قرار بگیرد کاهش می‌یابد. همچنین اگر دو آزمایش را مستقل فرض کرده‌اید، با توجه به ثابت بودن آلفا، احتمال رد شدن فرضیه درست در هر دو یکسان است.

۲. می‌خواهیم $P(x > 5)$ را برای $x \sim Exp(1)$ به کمک نمونه‌برداری تخمین بزنیم.

(آ) (۳نمره)چرا نمونه‌گیری مستقیم از $x \sim Exp(1)$ برای این تخمین ناکارآمد است؟

(ب) (۵ نمره)اگر به جای نمونه‌گیری از $p(x) \sim Exp(1)$ از $q(x) \sim Exp(\lambda)$ نمونه بگیریم، نحوه محاسبه احتمال مدنظر با استفاده از important sampling به چه صورت خواهد بود؟

(ج) (۱۰ نمره) با محاسبه واریانس این تخمین‌گر مقدار مناسب برای λ را پیدا کنید.

پاسخ

(آ) احتمال رخداد مورد نظر بسیار پایین بوده و برای تخمین به نمونه‌های بسیار زیادی نیاز است.

(ب)

$$E_{p(x)}[1(x>5)] = E_{q(x)}[\frac{p(x)}{q(x)}1(x>5)]$$

$$= E_{q(x)}[\frac{e^{-x}}{\lambda e^{-\lambda x}}1(x>5)]$$

(ج)

$$E_{q(x)}[(\frac{p(x)}{q(x)}1(x>5))^2] - \mu^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)^2}{q(x)^2}1(x>5)^2 q(x)dx - \mu^2$$

$$= \int_{5}^{\infty} \frac{e^{-2x}}{\lambda e^{-\lambda x}}dx - \mu^2$$

اگر $\lambda \geq 2$ باشد این انتگرا واگرا می‌شود پس برای $0 < \lambda < 2$ داریم:

$$= \frac{1}{\lambda}\int_{5}^{\infty} e^{(\lambda-2)x}dx - \mu^2$$

$$= \frac{1}{\lambda(\lambda-2)}(0 - e^{(\lambda-2)5}) - \mu^2$$

$$= \frac{-e^{(\lambda-2)5}}{\lambda(\lambda-2)} - \mu^2$$

حال برای پیدا کردن مقدار کمینه واریانس در بازه $0 < \lambda < 2$ از عبارت بالا بر حسب λ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$5\lambda^2 - 12 * \lambda + 2 = 0$$

که جواب معتبر در بازه $0 < \lambda < 2$ برابر است با:

$$\frac{12 - \sqrt{104}}{10}$$

۳. (۱۵ نمره) سروری داریم که سه وضعیت مختلف دارد: نرمال (N)، کند (S) و دچار مشکل شده (F). احتمال گذار به هر وضعیت جدید بر اساس وضعیت قبلی در هر ساعت به صورت زیر است:

$$T = \begin{bmatrix} & N & S & F \\ N & 0.7 & 0.3 & 0.0 \\ S & 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ F & 0.0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

یک سیستم پایشگر بر اساس زمان دریافت پاسخ در هر ساعت، وضعیت سرور را ضبط می‌کند: پاسخ سریع (FP [1])،

[1] Fast Ping

پاسخ کند (SP)، عدم دریافت پاسخ (T [2]). احتمال مشاهده هر کدام از سه وضعیت پاسخ‌دهی سرور بر اساس وضعیت داخلی سرور به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} & FP & SP & T \\ N & 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ S & 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ F & 0.0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

سرور پس از روشن شدن با احتمال مساوی در یکی از وضعیت‌های نرمال (N) یا کند (S) شروع به کار می‌کند. در طول ۳ ساعت اول سیستم پایشگر به ترتیب سه وضعیت را ثبت کرده است: ۱. پاسخ سریع (FP)، ۲. عدم دریافت پاسخ (T)، ۳. پاسخ کند (SP). کارشناس سرور پس از بررسی متوجه می‌شود که در ساعت دوم اتصال سیستم پایشگر دچار مشکل شده و در نتیجه وضعیت ثبت شده در ساعت دوم قابل اعتماد نیست.

با در نظر گرفتن تمامی اطلاعات موجود، محتمل‌ترین وضعیت‌های سرور را در هنگام شروع و در ۳ ساعت اولیه فعالیت به دست آورید (در نظر بگیرید که لازم است ۴ وضعیت گزارش دهید) .

- **لطفا برای حل مسئله ابتدا روابط ریاضی مربوط به آن را نوشته و سپس اعداد را جایگزین کرده و محاسبات را انجام دهید.**
- **لطفا محاسبات را با دقت ۳ رقم اعشار انجام دهید.**

Viterbi Algorithm

Initialization:

$$\delta_1(i) = \max P(q_1 = S_i, O_1) = \pi_i\, b_i(O_1), \qquad 1 \le i \le N$$

Forward Recursion:

$$\delta_k(j) = \max P(q_1, \ldots, q_{k-1}, q_k = S_j, O_1, O_2, \ldots, O_k)$$

$$= \max_i \left[a_{ij}\, b_j(O_k) \max P(q_1, \ldots, q_{k-1} = S_i, O_1, O_2, \ldots, O_{k-1})\right]$$

$$= \max_i \left[a_{ij}\, b_j(O_k)\, \delta_{k-1}(i)\right], \qquad 1 \le j \le N,\ 2 \le k \le K$$

Termination:

$$P^* = \max_i \left[\delta_K(i)\right]$$

پاسخ

H: Hidden states: N، S، F
S: Observable states: FP، P، T
H_0: Initial State Distribution: $p_0(N) = 0.5, p_0(S) = 0.5, p_0(F) = 0.$

Observations: $(O_1, O_2, O_3) = (FP, T, SP)$، but as O_2 is unreliable، it can actually be any of the TP، SP، and T states so $(O_1, O_2, O_3) = (FP, ?, SP)$.

[2] Timeout

Goal:

$$\begin{aligned}\text{argmax}_{H_0,H_1,H_2,H_3} & p((H_0, H_1, H_2, H_3)|(O_1 = FP, O_3 = SP)) \\ & \propto p((O_1 = FP, O_3 = SP)|(H_0, H_1, H_2, H_3)) \times p(H_0, H_1, H_2, H_3)\end{aligned} \quad (۱)$$

Viterbi:

$$\begin{aligned}&\delta_t(i) = \max_{H_0,\ldots,H_{t-1}} p(H_0, \ldots, H_{t-1}, H_t = i,\ O_1, \ldots, O_t) \\ &\forall t > 0 : \delta_t(i) = \max_{j\in(N,S,F)} \delta_{t-1}(j) \times p(i|j) \times p(O_t|H_t = i) \\ &\psi_{t>0}(i) : \text{argmax}_{j\in(N,S,F)}\delta_{t-1}(j) \times p(i|j) \times p(O_t|H_t = i)\end{aligned} \quad (۲)$$

- **t = ۰**
  - $\delta_0(N) = 0.5$
  - $\delta_0(S) = 0.5$
- **t = ۱**
  - $\delta_1(N) = p(FP|N)\times max(\delta_0(N)p(N|N), \delta_0(S)p(N|S), \delta_0(F)p(N|F)) = 0.9\times max(0.5\times 0.7, 0.5 \times 0.2) = 0.315; \quad \psi_1(N) = N$
  - $\delta_1(S) = p(FP|S)\times max(\delta_0(N)p(S|N), \delta_0(S)p(S|S), \delta_0(F)p(S|F)) = 0.1\times max(0.5\times 0.3, 0.5 \times 0.6) = 0.03; \quad \psi_1(S) = S$
  - $\delta_1(F) = p(FP|F) \times max(\delta_0(N)p(F|N), \delta_0(S)p(F|S), \delta_0(F)p(F|F)) = 0$
- **t = ۲** Note: There is no observation obligation here so we can omit the $p(O_2|H_2)$ part.
  - $\delta_2(N) = max(\delta_1(N)p(N|N), \delta_1(S)p(N|S), \delta_1(F)p(N|F)) = max(0.315 \times 0.7, 0.03 \times 0.2) = 0.220; \quad \psi_2(N) = N$
  - $\delta_1(S) = max(\delta_0(N)p(S|N), \delta_0(S)p(S|S), \delta_0(F)p(S|F)) = max(0.315 \times 0.3, 0.03 \times 0.6) = 0.094; \quad \psi_2(S) = N$
  - $\delta_1(F) = max(\delta_0(N)p(F|N), \delta_0(S)p(F|S), \delta_0(F)p(F|F)) = max(0.315 \times 0, 0.03 \times 0.2) = 0.006; \quad \psi_2(F) = S$
- **t = ۳**
  - $\delta_3(N) = p(SP|N)\times max(\delta_2(N)p(N|N), \delta_2(S)p(N|S), \delta_2(F)p(N|F)) = 0.1\times max(0.220\times 0.7, 0.094 \times 0.2) = 0.015; \quad \psi_3(N) = N$
  - $\delta_3(S) = p(SP|S)\times max(\delta_2(N)p(S|N), \delta_2(S)p(S|S), \delta_2(F)p(S|F)) = 0.8\times max(0.220\times 0.3, 0.094 \times 0.6, 0.006 \times 0.5) = 0.053; \quad \psi_3(S) = N$
  - $\delta_3(F) = p(SP|F)\times max(\delta_2(N)p(F|N), \delta_2(S)p(F|S), \delta_2(F)p(F|F)) = 0.5\times max(0.094\times 0.2, 0.006 \times 0.5) = 0.009; \quad \psi_3(F) = S$

Backward:

- $\text{argmax}_i(\delta_3(i)) = S$
- $\psi_3(S) = N$
- $\psi_2(N) = N$

- $\psi_1(N) = N$

Therefore، the most probable real states are: $\mathbf{N} \to$ **(N، N، S)**.

۴. فرض کنید $N(t)$ یک فرایند شمارشی باشد که روی بازهٔ $[0, T]$ مشاهده می‌شود و $N(0) = 0$. تنها اطلاعاتی که در اختیار دارید به صورت زیر است:

- برای هر t، فرایند $N(t)$ دارای افزایش‌های مستقل است.
- برای $h > 0$ کوچک،

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \theta h + o(h) \qquad P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$$

که در آن $\theta > 0$ یک پارامتر نامعلوم است.

شما کل مسیر نمونه را تا زمان T مشاهده می‌کنید و به طور خاص می‌دانید که $N(T) = n$.
به سؤالات زیر پاسخ دهید:

۱. (۴نمره) تابع درست‌نمایی $L(\theta)$ را بر اساس مشاهدات روی بازهٔ $[0, T]$ به دست آورید.
۲. (۴نمره) برآوردگر درست‌نمایی بیشینه (MLE) یعنی $\hat{\theta}$ را پیدا کنید.
۳. (۴نمره) امید ریاضی $E[\hat{\theta}]$ و واریانس $\mathrm{Var}(\hat{\theta})$ را محاسبه کنید.
۴. (۴نمره) اطلاعات فیشر[۳] و کران پایین کرامر—رائو[۴] را برای برآوردگرهای بدون اریبِ θ به دست آورید.
۵. (۴نمره) آیا $\hat{\theta}$ یک برآوردگر کارا (efficient) است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

پاسخ

Proof that the counting process is Poisson

Assume a counting process $N(t)$ satisfies:

۱) $N(0) = 0$ ۲) Independent increments ۳) For small $h > 0$:

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \theta h + o(h),$$

$$P(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - \theta h + o(h),$$

$$P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h),$$

where $\theta > 0$.

We prove that $N(T) \sim \mathrm{Poisson}(\theta T)$.

Divide the interval $[0, T]$ into m equal parts of length

$$\Delta = \frac{T}{m}.$$

Let

$$X_i = N(i\Delta) - N((i-1)\Delta), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

[۳] Fisher information
[۴] Cramér–Rao

By independent increments، the variables $X_1, \dots, X_m$ are independent.

For small Δ:

$$P(X_i = 1) = \theta\Delta + o(\Delta), \qquad P(X_i = 0) = 1 - \theta\Delta + o(\Delta),$$
$$P(X_i \geq 2) = o(\Delta).$$

Thus، each X_i behaves like a Bernoulli variable with success probability

$$p_m = \theta\Delta + o(\Delta).$$

Since

$$N(T) = \sum_{i=1}^{m} X_i,$$

we obtain approximately

$$N(T) \sim \text{Binomial}(m, p_m).$$

Hence،

$$P(N(T) = n) = \binom{m}{n} p_m^n (1 - p_m)^{m-n}.$$

Substitute $\Delta = T/m$:

$$p_m = \theta\frac{T}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right).$$

Now take the limit as $m \to \infty$.

First،

$$(1 - p_m)^m = \left(1 - \theta\frac{T}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m \longrightarrow e^{-\theta T}.$$

Second،

$$\binom{m}{n}\left(\frac{T}{m}\right)^n \longrightarrow \frac{T^n}{n!}.$$

Therefore،

$$\lim_{m\to\infty} P(N(T) = n) = e^{-\theta T}\frac{(\theta T)^n}{n!}.$$

Hence،

$$N(T) \sim \text{Poisson}(\theta T).$$

Since this holds for every $T > 0$، the process $\{N(t)\}$ is a Poisson process with rate θ. For a Poisson process،

$$P_\theta(N(T) = n) = e^{-\theta T}\frac{(\theta T)^n}{n!}.$$

The log-likelihood is

$$\ell(\theta) = -\theta T + n\log\theta + n\log T - \log(n!).$$

Differentiating and setting to zero:

$$\ell'(\theta) = -T + \frac{n}{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = \frac{n}{T}.$$

Since $N(T) \sim \text{Poisson}(\theta T)$،

$$E[\hat{\theta}] = \theta, \qquad \text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{\theta}{T}.$$

The Fisher information is

$$I(\theta) = \frac{T}{\theta},$$

and the CRLB is

$$\text{Var}(\tilde{\theta}) \geq \frac{\theta}{T}.$$

Hence $\hat{\theta}$ is efficient.

۵. فرض کنید $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ یک فرایند پواسون با نرخ نامعلوم $\lambda > 0$ باشد. شما کل تاریخچهٔ ورودها (به طور معادل، تمام زمان‌های پرش) را روی بازهٔ $[0, T]$ مشاهده می‌کنید، که در آن $T > 0$ ثابت است. عدد $t_0 \in (0, T)$ را ثابت در نظر بگیرید و کمیت هدف را به صورت

$$g(\lambda) := \lambda^2 e^{-\lambda t_0}$$

تعریف کنید.

۱. (۵نمره)نشان دهید که با وجود مشاهدهٔ کل مسیر فرایند، آمارهٔ $N(T)$ برای λ یک آمارهٔ کافی است.

۲. (۵نمره)ثابت کنید که آمارهٔ $N(T)$ کامل است.

۳. (۱۰ نمره) برآوردگر بدون اریب با واریانس کمینه (UMVUE) برای $g(\lambda)$ را بیابید و آن را به صورت یک فرم بسته ارائه کنید.

پاسخ

(a) If the observed path has $N(T) = n$، the joint density of ordered arrival times $0 < u_1 < \cdots < u_n < T$ is

$$f(u_1, \ldots, u_n \mid \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda T} \mathbf{1}\{0 < u_1 < \cdots < u_n < T\}.$$

This depends on the data only through $n = N(T)$، so by factorization $N(T)$ is sufficient.

(b) Let $N := N(T) \sim \text{Poisson}(\lambda T)$. Suppose $E_\lambda[h(N)] = 0$ for all $\lambda > 0$. Then for all $\lambda > 0$،

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^k}{k!} \quad \Longrightarrow \quad 0 = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \frac{(\lambda T)^k}{k!}$$

after multiplying by $e^{\lambda T}$. The right-hand side is an entire power series in λ that is identically 0، hence all coefficients vanish: $h(k)/k! = 0$ for all k، so $h(N) = 0$ a.s. Therefore $N(T)$ is complete.

(c) Since $N(T)$ is complete and sufficient، the UMVUE is the unique unbiased function of

$N(T)$. Let $N \sim \text{Poisson}(\lambda T)$ and set

$$a := 1 - \frac{t_0}{T} \in (0,1).$$

Use the factorial-moment identity (derivable from the pgf) for Poisson:

$$E\big[(N)_2\, a^{N-2}\big] = (\lambda T)^2 e^{\lambda T(a-1)}, \qquad (N)_2 := N(N-1).$$

Since $a - 1 = -t_0/T$، this becomes

$$E\big[(N)_2\, a^{N-2}\big] = (\lambda T)^2 e^{-\lambda t_0}.$$

Therefore an unbiased estimator of $\lambda^2 e^{-\lambda t_0}$ is

$$\delta(N) = \frac{1}{T^2}(N)_2\, a^{N-2}\mathbf{1}\{N \geq 2\} = \frac{N(T)(N(T)-1)}{T^2}\left(1 - \frac{t_0}{T}\right)^{N(T)-2}\mathbf{1}\{N(T) \geq 2\}.$$

Because δ is already a function of the complete sufficient statistic، it is the UMVUE:

$$\boxed{\text{UMVUE} = \frac{N(T)(N(T)-1)}{T^2}\left(1 - \frac{t_0}{T}\right)^{N(T)-2}\mathbf{1}\{N(T) \geq 2\}}.$$

۶. بابک برای جلوگیری از خاموش شدن گوشی‌اش در مسیر رفت‌وآمد طولانی بین خانه و محل کار، تعداد r پاوربانک خریده است. هر روز صبح، اگر سطح باتری گوشی او به کمتر از 20% برسد، یک پاوربانک با خود می‌برد. همین اتفاق ممکن است عصرها هنگام ترک محل کار نیز رخ دهد. با این حال، چون بابک تعداد پاوربانک‌های موجود در خانه یا محل کار را پیگیری نمی‌کند، تنها زمانی یک پاوربانک برمی‌دارد که هشدار باتری ضعیف را ببیند. در نتیجه، ممکن است گاهی همهٔ پاوربانک‌ها در یک مکان جمع شوند و بابک چاره‌ای جز خاموش شدن گوشی در میانهٔ مسیر نداشته باشد.

فرض کنید که بابک با احتمال p دچار هشدار باتری ضعیف می‌شود، چه در صبح هنگام رفتن به محل کار و چه در عصر هنگام بازگشت به خانه.

۱. (۵نمره) مسئله را به صورت یک زنجیرهٔ مارکوف مدل‌سازی کرده و احتمال‌های انتقال آن را محاسبه کنید.

۲. (۶نمره) توزیع مانای[۵] زنجیره را به دست آورید.

۳. (۶نمره) نرخ بلندمدتی[۶] را که بابک با مشکل خاموش شدن گوشی مواجه می‌شود، محاسبه کنید.

پاسخ

۱. States: The number of power banks at home، denoted by S_i.
Transition probabilities:

- $i \neq 0, r$:
  - $P(S_{i-1}|S_i)$: Low-battery alert in the morning (p)، but not in return $(q = 1 - p)$ $\Rightarrow pq$
  - $P(S_i|S_i)$: Alert in the morning and in return or no alert neither in the morning nor in return: $\Rightarrow p^2 + q^2$

[۵] stationary distribution
[۶] long-run rate

  - $P(S_{i+1}|S_i)$: No alert in the morning، but low-battery experience in return $\Rightarrow qp$
- $i = 0$:
  - $P(S_0|S_0)$: No alert in return $\Rightarrow q$
  - $P(S_1|S_0)$: Alert in return $\Rightarrow p$
- $i = r$:
  - $P(S_r|S_r)$: Alert in the morning and in return؛ No alert in the morning $\Rightarrow p^2 + q$
  - $P(S_{r-1}|S_r)$: Alert in the morning but not in return $\Rightarrow pq$

۲. According to steady-state equations:

$$\begin{aligned}
&\pi_0 = P(S_0|S_1)\pi_1 + P(S_0|S_0)\pi_0 \Rightarrow \pi_0 = pq\pi_1 + q\pi_0 \Rightarrow \pi_0 = q\pi_1\\
&\pi_1 = P(S_1|S_0)\pi_0 + P(S_1|S_1)\pi_1 + P(S_1|S_2)\pi_2 \Rightarrow \pi_1 = p \times q\pi_1 + (p^2+q^2)\pi_1 + pq\pi_2\\
&\quad \Rightarrow pq\pi_1 = pq\pi_2 \Rightarrow \pi_1 = \pi_2\\
&\pi_2 = P(S_2|S_1)\pi_1 + P(S_2|S_2)\pi_2 + P(S_2|S_3)\pi_3 \Rightarrow \pi_2 = pq\pi_2 + (p^2+q^2)\pi_2 + pq\pi_3\\
&\quad \Rightarrow pq\pi_2 = pq\pi_3 \Rightarrow \pi_2 = \pi_3\\
&\forall i < r; \pi_{i-1} = \pi_i \Rightarrow \pi_i = \pi_{i+1} \quad \text{as}\\
&\pi_i = P(S_i|S_{i-1})\pi_{i-1} + P(S_i|S_i)\pi_i + P(S_i|S_{i+1})\pi_{i+1} \Rightarrow \pi_i = pq\pi_i + (p^2+q^2)\pi_i + pq\pi_{i+1}\\
&\quad \Rightarrow pq\pi_i = pq\pi_{i+1} \Rightarrow \pi_i = \pi_{i+1}\\
&\sum_{i=0}^{r} \pi_i = 1 \Rightarrow q\pi_1 + r * \pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{q+r}\\
&\forall i \neq 0; \pi_i = \pi_1 = 1 = \frac{1}{q+r}; \pi_0 = q\pi_1 = \frac{q}{q+r}
\end{aligned} \tag{۳}$$

۳. There are two such situations: ۱. Being at S_0 and seeing alert in the morning or being at S_r، not seeing alert in the morning but seeing alert when returning from work. The long-run probability would be:

$$\pi_0 \times p + \pi_r \times q \times p = \frac{q}{q+r} \times p + \frac{1}{q+r} \times qp = \frac{2qp}{q+r} \tag{۴}$$