به نام خدا

فرایندهای تصادفی
پاییز و زمستان ۱۴۰۴
حمیدرضا ربیعی

دانشگاه صنعتی شریف

کوئیز ۸ | *Hypothesis Testing* | تاریخ: ۹ دی

1. هنگام انجام آزمون Z [1] برای متغیر تصادفی X، فرض می‌کنیم که واریانس آن (σ^2) مشخص است و هدف آزمون بررسی صحت میانگین آن (μ) است. به این منظور از تعدادی نمونه $X_1, X_2, ..., X_n$ و رابطه‌ی $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{s}$ استفاده می‌کنیم.
   - (a) در رابطه‌ی فوق منظور از s چیست؟ *(۵ نمره)*
   - (b) نمونه‌های گرفته‌شده باید چه شرایطی داشته باشند؟ *(۵ نمره)*
   - (c) متغیر $\bar{X}$ از چه تابع توزیع احتمالی *(pdf)* تبعیت می‌کند و این فرض بر اساس کدام قضیه استخراج شده است؟ *(۱۰ نمره)*
   - (d) متغیر Z از چه تابع توزیعی تبعیت می‌کند؟ *(۵ نمره)*
   - (e) پارامتر α چه نوع خطایی را نشان می‌دهد؟ *(۵ نمره)*
   - (f) چه ارتباطی بین Z و α برقرار است؟ *(۵ نمره)*

2. متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس $\sigma^2 = 900$ است. ۱۰۰ نمونه تصادفی از این توزیع گرفته‌ایم که میانگین آن‌ها ۲۰۰ شده است. به ازای $\alpha = 0.04$ به سوالات زیر پاسخ دهید.
   - (a) فرضیه $\mu = 194$ را بررسی کنید. آیا رد می‌شود یا خیر؟ *(۲۰ نمره)*
   - (b) احتمال $\mu \leq 194$,$\bar{X} \geq 200$ چقدر است؟ *(۱۵ نمره)*
   - (c) در خصوص فرضیه $\mu \leq 194$ چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ *(۵ نمره)*
   - (d) محدوده K را بیابید به طوری که فرضیه $\mu \leq K$ رد شود اما $\mu = K$ رد نشود. *(۲۵ نمره)*

[1] *Z-test*

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952

1. (a) $s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(b) به شکل مستقل از یک توزیع یکسان گرفته شده باشند. *(i.i.d.)*

(c) براساس قضیه *Central limit theorem* اگر تعدد نمونه‌ها به سمت بینهایت میل کند، میانگین نمونه‌ها $\bar{X}$، از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ تبعیت می کند.

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

(d) $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

(e) این پارامتر نشان می‌دهد در صورتی که میانگین μ درست باشد، به چه احتمالی در آزمون Z رد می‌شود.

(f) متغیر α مساحت زیر نمودار تابع توزیع احتمال نرمال استاندارد را در zهایی نشان می‌دهد که به ازای آن zها فرضیه رد می‌شود. بنابراین z هایی که به ازای آن‌ها فرضیه رد می‌شود، باید به نحوی انتخاب شوند، که مساحت زیر نمودار تابع توزیع احتمال نرمال استاندارد در این نقاط برابر α شود.

2. (a) *Two Tail*

$$s = \frac{30}{10} = 3 \Rightarrow z = \frac{200-194}{3} = 2$$

$$P-Value = P(Z \geq 2 \; or \; Z \leq -2) = 2 \times (1-0.9772) = 0.0456$$

$$P-Value \geq \alpha \Rightarrow Do \; Not \; Reject.$$

(b) *One Tail*

$$z \geq \frac{200-194}{3} \Rightarrow z \geq 2$$

$$P(Z \geq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

(c) با توجه به اینکه $P-Value < \alpha$ این فرضیه رد می‌شود.

(d) از روی مقدار α باید مقادیر Z رد این دو فرضیه را بیابیم.

$$One \; Tail: \; \alpha = 0.04 \Rightarrow 1-\alpha = 0.96 \Rightarrow z \geq 1.75$$

$$Two \; Tail: \; \frac{\alpha}{2} = 0.02 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.98 \Rightarrow z \geq 2.05 \; or \; z \leq -2.05$$

بنابراین برای اینکه فرضیه اول رد شود ولی دومی رد نشود،

$$z \geq 1.75 \; and \; z \leq 2.05 \Rightarrow 1.75 \leq z \leq 2.05$$

$$1.75 \leq \frac{200-K}{3} \leq 2.05 \Rightarrow 193.85 \leq K \leq 194.75$$