به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

فرایندهای تصادفی
پاییز ۲۰۲۵
حمیدرضا ربیعی

کوئیز ۲ (۲۰ دقیقه) | Concepts of Stochastic Processes, WSS, SSS | تاریخ: ۶ آبان

1. درصد اتلاف بسته[1] روی مسیریاب (router) اصلی اینترنت یک دانشگاه را به عنوان یک فرایند تصادفی $X(t)$ در نظر بگیرید، که t زمان روز است (۵۵ نمره).

(a) **تفاوت عملی** بین $X(t, \xi_{\text{Monday}})$ و $X(t = 14:00, \xi)$ چیست؟ کدام یک **متغیر تصادفی** و کدام یک **مسیر نمونه** [2] است؟ **(۱۰ نمره)**

(b) مقادیر $C_{XX}(t_1 = 4:00, t_2 = 4:01)$ و $C_{XX}(t_3 = 14:00, t_4 = 14:01)$ را مقایسه کنید. آیا انتظار دارید برابر باشند؟ دلیل خود را توضیح دهید. **(راهنمایی: به ازدحام شبکه در ساعات اوج بار و غیراوج بار فکر کنید)** $C_{XX}(t_1, t_2)$ تابع خودکوواریانس [3] فرایند تصادفی در دو زمان t_1 و t_2 است. **(۱۵ نمره)**.

(c) مقادیر $C_{XX}(14:00, 14:01)$ و $C_{XX}(14:00, 22:00)$ را مقایسه کنید. انتظار دارید کدام مقدار کوواریانس بسیار به صفر نزدیکتر باشد و چرا؟ بر اساس پاسخ خود، آیا این فرایند **ایستای قوی** [4] است؟ در مورد **ایستای ضعیف** [5] چطور؟ پاسخ خود را توجیه کنید **(۱۵ نمره)**.

(d) حال، فرایند دومی، $Y(t)$، را به عنوان تعداد کل کاربران فعال متصل به مسیریاب در زمان t تعریف می‌کنیم. کوواریانس متقابل [6] $C_{XY}(t_1, t_2)$ را در نظر بگیرید.
در مورد مقدار $C_{XY}(14:00, 14:00)$ و $C_{XY}(14:00, 4:00)$ چه انتظاری دارید (صفر، مثبت، منفی)؟ استدلال فیزیکی خود را برای هر دو توضیح دهید **(۱۵ نمره)**.

2. یک برنامه دچار نشت حافظه است.[7] حافظه مصرفی آن به صورت $X(t) = At + B$ مدل‌سازی می‌شود، که t زمان بر حسب ساعت است. حافظه اولیه B و نرخ نشت A متغیرهای تصادفی مستقل هستند (۴۵ نمره).

$$E[A] = 10 \text{ MB/hr}$$
$$\text{Var}(A) = 4 \text{ MB}^2/\text{hr}^2$$
$$E[B] = 100 \text{ MB}$$
$$\text{Var}(B) = 2500 \text{ MB}^2$$

(a) میانگین حافظه مصرفی $\mu_X(t) = E[X(t)]$ و واریانس $\text{Var}(X(t))$ را به عنوان توابعی از زمان محاسبه کنید. این در مورد رفتار میانگین و عدم قطعیت برنامه چه می‌گوید؟ **(۱۵ نمره)**

(b) تابع خودکوواریانس $C_{XX}(t_1, t_2)$ را محاسبه کنید. این تابع در مورد «حافظه» یا همبستگی فرایند در طول زمان چه می‌گوید؟ **(۱۵ نمره)**

(c) بر اساس پاسخ‌های شما در بخش (الف) و (ب)، آیا این فرایند **ایستای قوی** (SSS) است؟ در مورد **ایستای ضعیف** (WSS) چطور؟ پاسخ خود را توجیه کنید. **(۱۵ نمره)**

---

[1] اتلاف بسته (Packet loss) زمانی رخ می‌دهد که یک یا چند بسته داده در حال حرکت در شبکه کامپیوتری به مقصد خود نرسند. این یک مشکل رایج در ارتباطات شبکه است.

[2] Sample Path

[3] Autocovariance

[4] Strict-Sense Stationary

[5] Wide-Sense Stationary

[6] Cross-Covariance

[7] نشت حافظه (Memory Leak) نوعی نشت منابع است که زمانی رخ می‌دهد که یک برنامه کامپیوتری تخصیص‌های حافظه را به گونه‌ای نادرست مدیریت کند که حافظه‌ای که دیگر مورد نیاز نیست، آزاد نشود.

1. (a) **تفاوت:**
- $X(t, \xi_{\text{Monday}})$ یک **مسیر نمونه** است. این یک تابع معین (deterministic) و یکتا از زمان (از $t = 0$ تا 24) است که نشان‌دهنده اتلاف بسته *واقعی* رخ داده در آن دوشنبه خاص است.
- $X(t = 14:00, \xi)$ یک **متغیر تصادفی** است. این یک عدد واحد برگرفته از یک توزیع احتمال است، که نشان‌دهنده *مجموعه* (ensemble) تمام مقادیر ممکن اتلاف بسته در ساعت ۲:۰۰ بعد از ظهر، در سراسر کل مجموعه تمام روزهای هفته است.

(b) **مقایسه** $C_{XX}(4:00, 4:01)$ و $C_{XX}(14:00, 14:01)$**:** خیر، برابر نخواهند بود. خودکوواریانس $C_{XX}(t, t+\tau)$ به واریانس خود فرایند (نوسانات) در زمان t بستگی دارد.
- در ساعت ۴:۰۰ صبح (غیراوج)، واریانس $C_{XX}(4:00, 4:01)$ بسیار کوچک است.
- در ساعت ۲:۰۰ بعد از ظهر (اوج بار)، واریانس $C_{XX}(14:00, 14:01)$ بزرگ است.

از آنجایی که خودکوواریانس $C_{XX}(t_1, t_2)$ با انحراف معیارهای فرایند در t_1 و t_2 مقیاس می‌شود، کوواریانس در ساعت ۲:۰۰ بعد از ظهر به طور قابل توجهی بزرگتر خواهد بود.

(c) **مقایسه و ایستایی:** کوواریانس $C_{XX}(14:00, 22:00)$ بسیار به صفر نزدیکتر خواهد بود.
- $C_{XX}(14:00, 14:01)$ مقدار بالایی دارد زیرا ازدحام شبکه حافظه کوتاه‌مدت قوی دارد.
- $C_{XX}(14:00, 22:00)$ نزدیک به صفر است زیرا فعالیت کاربران در ساعت ۲:۰۰ بعد از ظهر از نظر آماری مستقل از فعالیت در ساعت ۱۰:۰۰ شب است.

ایستایی:
- **WSS نیست:** از بخش (ب)، $C_{XX}(4:00, 4:01) \neq C_{XX}(14:00, 14:01)$. با وجود اینکه تاخیر زمانی $\tau = 1$ دقیقه یکسان است، خودکوواریانس به زمان مطلق t بستگی دارد. بنابراین، فرایند **WSS نیست**.
- **SSS نیست:** یک فرایند برای SSS بودن باید WSS باشد (مگر اینکه گشتاورهای مرتبه دوم آن نامتناهی باشند، که در اینجا اینطور نیست). از آنجایی که WSS نیست، **نمی‌تواند SSS باشد**.

(d) **کوواریانس متقابل:**
- $C_{XY}(14:00, 14:00)$ **به طور قابل توجهی مثبت** خواهد بود. در ساعات اوج، تعداد کاربران بیشتر (Y) مستقیماً باعث اتلاف بسته بیشتر (X) می‌شود. فرایندها همبستگی مثبت دارند.
- $C_{XY}(14:00, 4:00)$ **نزدیک به صفر** خواهد بود. اتلاف بسته در ساعت ۲:۰۰ بعد از ظهر هیچ ارتباط آماری با فعالیت کاربران در ساعت ۴:۰۰ صبح ندارد.

2. (a) **آماره‌های مرتبه اول:**

$$\mu_X(t) = E[At + B] = E[A]t + E[B] = 10t + 100 \quad \text{مگابایت}$$

از آنجایی که A و B مستقل هستند:

$$\text{Var}(X(t)) = \text{Var}(At + B) = \text{Var}(At) + \text{Var}(B) = t^2\text{Var}(A) + \text{Var}(B)$$

$$\text{Var}(X(t)) = 4t^2 + 2500$$

تفسیر: به طور میانگین، حافظه برنامه به صورت خطی رشد می‌کند. واریانس به صورت درجه دوم رشد می‌کند، به این معنی که *عدم قطعیت* یا *پراکندگی* مصرف حافظه در اجراهای مختلف، با گذشت زمان بیشتر می‌شود.

(b) **خودکوواریانس:** از تعریف $C_{XX}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))]$ استفاده می‌کنیم.

$$X(t) - \mu_X(t) = (At + B) - (E[A]t + E[B]) = (A - E[A])t + (B - E[B])$$

فرض کنید $A' = A - E[A]$ و $B' = B - E[B]$. چون A, B مستقل هستند، $E[A'B'] = E[A']E[B'] = 0$.

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1, t_2) &= E[(A't_1 + B')(A't_2 + B')] = E[A'^2 t_1 t_2 + A'B'(t_1 + t_2) + B'^2] \\ &= E[A'^2]t_1 t_2 + E[A'B'](t_1 + t_2) + E[B'^2] \\ &= \text{Var}(A)t_1 t_2 + \text{Var}(B) = 4t_1 t_2 + 2500 \end{aligned}$$

تفسیر: کوواریانس همیشه مثبت است و به زمان‌های مطلق t_1, t_2 بستگی دارد. این بدان معناست که فرایند «حافظه» قوی دارد زیرا مصرف در t_1 و t_2 هر دو توسط متغیرهای تصادفی یکسان A و B تعیین می‌شوند.

(c) **ایستایی:**

- **WSS نیست:** یک فرایند WSS است اگر (۱) میانگین آن ثابت باشد و (۲) خودکوواریانس آن فقط به تاخیر زمانی $\tau = t_1 - t_2$ بستگی داشته باشد. این فرایند هر دو شرط را نقض می‌کند:
  i. $\mu_X(t) = 10t + 100$ که ثابت نیست.
  ii. $C_{XX}(t_1, t_2) = 4t_1t_2 + 2500$ که به t_1 و t_2 بستگی دارد، نه فقط به τ.
  بنابراین، فرایند **WSS نیست**.
- **SSS نیست:** از آنجایی که فرایند WSS نیست، **نمی‌تواند SSS باشد**.