به نام خدا

درس فرآیندهای تصادفی
پاییز و زمستان ۱۴۰۴
حمیدرضا ربیعی

دانشگاه صنعتی شریف

کوئیز ۱۰ | **Sampling** | **تاریخ: ۳۰دی**

۱. فرض کنید برای محاسبه $E_p[f(x)]$ به جای نمونه گیری از توزیع هدف $p(x)$ از توزیع پیشنهادی $q(x)$ استفاده می‌کنیم. (۴۰ نمره)

الف) فرمول تخمین‌گر را بر اساس نمونه‌های $x_i \sim q(x)$ بنویسید.

ب) اگر $q(x)$ طوری انتخاب شود که در نقاطی مثل x_0 ، $p(x_0) = 0$ و $q(x_0) > 0$ باشد، چه مشکلی پیش می‌آید؟

ج) اگر $q(x)$ طوری انتخاب شود که در نقاطی مثل x_0 ، $q(x_0) = 0$ و $p(x_0) > 0$ باشد، چه مشکلی پیش می‌آید؟

د) اگر $q(x)$ طوری انتخاب شود که در نقاطی مثل x_0 ، $p(x_0) \gg q(x_0)$ باشد، چه مشکلی پیش می‌آید؟

پاسخ: الف)

$$E_p[f(x)] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\frac{p(x_i)}{q(x_i)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)w(x_i)$$

ب) این نقاط دارای وزن صفر بوده و در تخمین کمک زیادی نخواهد کرد. (هدر رفت نمونه‌ها)

ج) از این نقاط نمونه گرفته نشده و تخمین‌گر دچار بایاس می‌شود.

د) این نقاط وزن بسیار زیادی ایجاد کرده و باعث واریانس بالا و ناپایداری عددی خواهند شد.

۲. دو دایره با شعاع و فاصله مراکز واحد در نظر بگیرید. با استفاده از نمونه‌برداری مونته‌کارلو یک روش برای تخمین ناحیه اشتراک آن‌ها پیشنهاد دهید. (۳۰ نمره)

پاسخ:

- نقاط تصادفی را در مربع واحد تولید می‌کنیم.
- نقاطی که در هر دو رابطه $x^2 + y^2 < 1$ و $x^2 + (y-1)^2 < 1$ صدق می‌کنند می‌شماریم.
- مساحت این ناحیه برابر است با ۲ برابر تعداد نقاطی که در رابطه بالا صدق کردند به تمام نقاط.

۳. توزیع احتمال مشترک دو متغیر تصادفی دودویی X و Y را به صورت زیر در نظر بگیرید. اگر در الگوریتم نمونه برداری گیبس از حالت $(X=0, Y=0)$ شروع کرده باشیم. مراحل فرآیند نمونه‌برداری گیبس را برای یک دور به‌روزرسانی X و Y بنویسید. (۳۰ نمره)

$$P(X=0, Y=0) = 0.3$$
$$P(X=1, Y=0) = 0.2$$
$$P(X=0, Y=1) = 0.4$$

$$P(X=1, Y=1) = 0.1$$

در این سوال برای مقادیر تصادفی از دنباله زیر که از توزیع $uniform(0,1)$ نمونه برداری شده‌اند استفاده کنید.

$$u_1 = 0.81, u_2 = 0.12, u_3 = 0.36, u_4 = 0.94$$

پاسخ:

ابتدا X را به روز کرده و سپس سراغ Y می‌رویم.

$$P(X=0|Y=0) = \frac{P(X=0, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{0.3}{0.3+0.2} = 0.6$$

چون $u_1 = 0.81 \geq 0.6$ شد پس $X=1$ انتخاب می‌شود. حال برای Y نیز داریم:

$$P(Y=0|X=1) = \frac{P(X=1, Y=0)}{P(X=1)} = \frac{0.2}{0.2+0.1} = 0.67$$

چون $u_2 = 0.12 \leq 0.67$ پس $Y=0$ باقی می‌ماند.