بسمه تعالی

فرآیندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۱۴۰۴-۰۵

دکتر ربیعی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

تمرین سوم	فرآیندهای پواسون، گاوسی	زمان تحویل:

۱. در یک شرکت پستی، بسته‌ها طبق یک فرآیند پواسون با نرخ ۶ بسته در ساعت به دفتر مرکزی می‌رسند. برای استفاده‌ی بهینه از زمان و جلوگیری از رفت‌وآمدهای غیرضروری، پستچی تنها زمانی برای توزیع بسته‌ها اعزام می‌شود که سومین بسته نیز به دفتر رسیده باشد.

(آ) امید ریاضی زمانی که از شروع کار دفتر تا زمان ارسال اولین بسته (یعنی رسیدن سومین بسته به دفتر) طول می‌کشد را محاسبه کنید.

(ب) احتمال این که در اولین ساعت شروع به کار دفتر، پستچی برای توزیع بسته‌ها اعزام نشود را به دست آورید.

۲. در یک ایستگاه خدمات اورژانس شهری، تماس‌های اضطراری از سوی شهروندان طبق یک فرآیند پواسون با نرخ λ دریافت می‌شوند.

(آ) فرض کنید تا لحظه‌ی t دقیقاً یک تماس اضطراری دریافت شده است. با دانستن این موضوع، می‌خواهیم تابع توزیع احتمال تجمعی شرطی زمان این تماس را پیدا کنیم (یعنی تابع $F_{S_1|N_t=1}(s)$). از نتیجه‌ی به‌دست‌آمده چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

(ب) اکنون فرض کنید تا لحظه‌ی t دقیقاً دو تماس اضطراری دریافت شده‌اند. توابع توزیع احتمال تجمعی شرطی زمان وقوع تماس اول و تماس دوم را تعیین کنید (به‌ترتیب $F_{S_1|N_t=2}(s)$ و $F_{S_2|N_t=2}(s)$).

۳. در یک شرکت بزرگ فناوری، چهار مرکز داده‌ی مستقل وجود دارد که هر کدام دچار خرابی‌های بزرگ می‌شوند. وقوع این خرابی‌ها در هر مرکز به‌صورت مستقل و طبق یک فرآیند پواسون مدل‌سازی می‌شود. در جدول زیر، مقدار امید زمانی بین دو خرابی بزرگ در هر یک از مراکز داده آمده است. مقدار امید زمانی بین دو خرابی بزرگ در کل شرکت را محاسبه کنید.

مرکز داده	امید زمان بین دو خرابی بزرگ
مرکز تهران	۳ ماه
مرکز تبریز	۴ ماه
مرکز کرمانشاه	۲ ماه
مرکز مشهد	۵ ماه

۴. فرآیند تصادفی ورود را دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی صعودی به صورت $0 < S_1 < S_2 < \dots < S_n$ تعریف می‌کنیم که هر S_i زمان وقوع رخداد iام است. این فرآیند از زمان ۰ آغاز می‌شود. این فرآیند را با دو دسته متغیر تصادفی دیگر نیز نشان می‌دهند. در حالت اول با دنباله متغیرهای تصادفی X_i که فاصله زمانی میان رخدادهای $i-1$ و i است. در حالت دوم، برای زمان دلخواه $t \geq 0$ متغیر $N(t)$ برابر با تعداد رخدادها در بازه زمانی $[0, t]$ تعریف می‌شود.

(آ) نشان دهید $P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n)$

(ب) فرض کنید $X_1, X_2, ...$ متغیرهاي تصادفی مثبت iid از تابع چگالی $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ هستند. متغیر $S_n =$ $X_1 + X_2 + ...X_n$ را براي همه nهای بزرگتر مساوي یک در نظر بگیرید. نشان دهید براي همه‌ی n های بزرگ‌تر از یک داریم:

$$f_{S_1,...,S_n}(s_1, s_2, ..., s_n) = \lambda^n \exp(-\lambda s_n), \qquad for \quad 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n \tag{1}$$

(ج) برای یک فرآیند پواسون با نرخ λ مقدار $Pr(S_1, S_2, S_3, ..., S_{n-1}|S_n = t)$ را حساب کنید.

۵. فرض کنید Π یک فرآیند نقطه‌ای پواسون روی بازه‌ی $[0, \infty)$ با شدت λ باشد. نشان دهید که اگر بدانیم در بازه‌ی واحد دقیقاً یک نقطه وجود دارد، توزیع مکانی آن نقطه یکنواخت است.

۶. فرض کنید $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ به‌صورت $X(t) = tA$ برای همه‌ی $t \in \mathbb{R}$ تعریف شده است، که در آن $A \sim \mathcal{N}(0, 1)$ می‌باشد. نشان دهید که $X(t)$ یک فرآیند گاوسی است. میانگین آن را برای هر t و تابع کوواریانس آن را بیابید.

۷. فرض کنید X و Y متغیرهای مشترکا گاوسی با میانگین صفر و واریانس‌های σ_X^2 و σ_Y^2 با ماتریس کواریانس نرمال شده‌ی ρ باشند.

(آ) اگر $V = Y^3$، تابع چگالی احتمال شرطی $f_{X|V}(x|v)$ را بیابید.

(ب) اگر $U = Y^2$، تابع چگالی احتمال شرطی $f_{X|U}(x|u)$ را بیابید.

سوال ۱ ـ

1. a) The expected time from the opening until the start of examination is exactly the third arrival time S_3, which follows the gamma distribution $\mathrm{Gama}(3, 6)$; its expected value equals $3 \cdot 1/6 = 1/2$, i. e., half an hour.

b) $\mathbb{P}(N_1 < 3) = \mathrm{Pois}(6)\{0, 1, 2\} = \sum_{k=0}^{2} \frac{6^k e^{-6}}{k!} = 25\, e^{-6} \doteq 0{\cdot}0620.$

سوال ۲ـ

a) For $0 \le s \le t$, we have:

$$\begin{aligned}
F_{S_1|N_t=1}(s) &= \mathbb{P}(S_1 \le s \mid N_t = 1) = \\
&= \mathbb{P}(N_s \ge 1 \mid N_t = 1) = \\
&= \mathbb{P}(N_s = 1 \mid N_t = 1) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s = 1, N_t = 1)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s = 1, N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s = 1)\, \mathbb{P}(N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} = \\
&= \frac{\lambda s\, e^{-\lambda s}\, e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t\, e^{-\lambda t}} = \\
&= \frac{s}{t}\,.
\end{aligned}$$

Thus, the desired conditional distribution is exactly the uniform distribution over $(0, t)$.

b) Similarly as before, for $0 \le s \le t$, compute:

$$\begin{aligned}
F_{S_2|N_t=2}(s) &= \mathbb{P}(N_s \ge 2 \mid N_t = 2) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s = 2, N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 2)} = \\
&= \frac{s^2}{t^2}\,,
\end{aligned}$$

so that $f_{S_2|N_t=2}(s) = \dfrac{2s}{t^2}$ and $\mathbb{E}(S_2 \mid N_t = 2) = \dfrac{2t}{3}$.

Next,

$$\begin{aligned}
F_{S_1|N_t=2}(s) &= \mathbb{P}(N_s \ge 1 \mid N_t = 2) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s = 1, N_t - N_s = 1) + \mathbb{P}(N_s = 2, N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 2)} = \\
&= \frac{2st - s^2}{t^2}\,,
\end{aligned}$$

so that $f_{S_1|N_t=2}(s) = \dfrac{2(t-s)}{t^2}$ and $\mathbb{E}(S_1 \mid N_t = 2) = \dfrac{t}{3}$.

سوال۳ـ

Solution: *Let* $N_1(t)$ *be the number of hurricanes causing a loss occurrence in excess of 1 billion until time* t *years. Let* $N_2(t)$ *be the number of earthquakes causing a loss occurrence in excess of 1 billion until time* t *years. Let* $N_3(t)$ *be the number of fires causing a loss occurrence in excess of 1 billion until time* t *years.* N_1, N_2, N_3 *are 3 independent Poisson processes with respective rates* $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{5}$, $\lambda_3 = \frac{1}{10}$. *Let* $N(t) = N_1(t) + N_2(t) + N_3(t)$. N *has rate function* $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$. *The expected amount of time between loss occurrences in excess of 1 billion is* $\frac{5}{4} = 1.25$.

سوال۴ـ

$$\{S_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}.$$

To see this, note that $\{S_n \le t\}$ is the event that the nth arrival occurs at some epoch $\tau \le t$. This event implies that $N(\tau) = n$, and thus that $\{N(t) \ge n\}$. Similarly, $\{N(t) = m\}$ for some $m \ge n$ implies $\{S_m \le t\}$, and thus that $\{S_n \le t\}$.

Recall from (2.1) that, for a Poisson process, S_n is the sum of n IID rv s, each with the density function $\mathsf{f}_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $x \ge 0$. Also recall that the density of the sum of two independent rv s can be found by convolving their densities, and thus the density of S_2 can be found by convolving $\mathsf{f}_X(x)$ with itself, that of S_3 by convolving the density of S_2 with $\mathsf{f}_X(x)$, and so forth. The result, for $t \ge 0$, is called the *Erlang density*,[5]

$$\mathsf{f}_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} \exp(-\lambda t)}{(n-1)!}. \tag{2.13}$$

$$\mathsf{f}_{S_1 \cdots S_n}(s_1, \ldots, s_n) = \lambda^n \exp(-\lambda s_n) \qquad \textit{for } 0 \le s_1 \le s_2 \cdots \le s_n. \tag{2.15}$$

Proof Replacing X_1 with S_1 in (2.14), we see the theorem holds for $n = 2$. This serves as the basis for the following inductive proof. Assume (2.15) holds for given n. Then

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_{S_1 \cdots S_{n+1}}(s_1, \ldots, s_{n+1}) &= \mathsf{f}_{S_1 \cdots S_n}(s_1, \ldots, s_n) \mathsf{f}_{S_{n+1}|S_1 \cdots S_n}(s_{n+1}|s_1, \ldots, s_n) \\ &= \lambda^n \exp(-\lambda s_n) \mathsf{f}_{S_{n+1}|S_1 \cdots S_n}(s_{n+1}|s_1, \ldots, s_n), \end{aligned} \tag{2.16}$$

where we used (2.15) for the given n. Now $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Since X_{n+1} is independent of $S_1, \ldots, S_n$,

$$\mathsf{f}_{S_{n+1}|S_1 \cdots S_n}(s_{n+1}|s_1, \ldots, s_n) = \lambda \exp\big(-\lambda(s_{n+1} - s_n)\big).$$

Substituting this into (2.16) yields (2.15). □

$$Pr(S_۱, S_۲, S_۳, \ldots, S_{n-۱}|S_n = t) = \frac{Pr(S_۱, S_۲, S_۳, \ldots, S_{n-۱}, S_n = t)}{Pr(S_n = t)} = \frac{\lambda^n \exp(-\lambda S_n)}{\frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^n}{n!}} == \frac{n!}{t^n} \qquad (۱)$$

سوال ۵ـ

Solution. Let X_1 and X_2 be independent exponential random variables of rate λ representing the inter-arrival times. Let U be the location of the point in question. We are asked to compute

$$\mathbb{P}(U \leq x | X_1 < 1, X_2 + X_1 > 1) = \mathbb{P}(X_1 \leq x | X_1 < 1, X_2 + X_1 > 1)$$

for $0 < x < 1$.
Since X_1 and X_2 are independent, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 < x, X_2 + X_1 > 1) &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda x_1} \left(\int_{1-x_1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x_2} dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda(1-x_1)} dx_1 \\ &= x \lambda e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

Hence, using this formula in the numerator, and also in the denominator with $x = 1$, we have

$$\mathbb{P}(U \leq x | X_1 < 1, X_2 + X_1 > 1) = \frac{x \lambda e^{-\lambda}}{\lambda e^{-\lambda}} = x$$

as desired.

سوال ۶ ـ

برای هر تعداد انتخاب k از زمان های دلخواه $t_1, t_2, \ldots, t_k$ متغیرهای X_{t_1}، X_{t_2}، ...، X_{t_k} برابر با متغیرهای تصادفی At_1، At_2، ...، At_k هستند.

توزیع توام این متغیرها را می توان طبق قاعده زنجیره ای به صورت زیر نوشت:

$$f(At_1, At_2, \ldots, At_k) = f(At_1) \times f(At_2 | At_1) \times \cdots \times f(At_k | At_{k-1}, \ldots, At_1)$$

$f(At_1)$ دارای فرم توزیع نرمال است. باقی عبارات هم به صورت مقادیر ثابت هستند. بنابراین توزیع مشترک X_{t_1}، X_{t_2}، ...، X_{t_k} فرم یک توزیع نرمال را دارد و بنا بر تعریف فرآیند حاصل یک فرآیند نرمال است.

$$E[tA] = tE[A] = 0$$

$$E[X(t_1)X(t_2)] = E[A^2]\, t_1 t_2 = t_1 t_2$$

سوال ۷ـ

Solution: Note that $v = y^3$ for $y \in \mathbb{R}$ is a one-to-one mapping. It follows that if $V = v$, then $Y = v^{1/3}$. Thus $\mathsf{f}_{X|V}(x|v)$ can be found directly from $\mathsf{f}_{X|Y}(x|y)$ as given in (3.37) by substituting $v^{1/3}$ for y, *i.e.*,

$$\mathsf{f}_{X|V}(x|v) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left[\frac{-\left[x - \rho(\sigma_X/\sigma_Y)v^{1/3}\right]^2}{2\sigma_X^2(1-\rho^2)}\right].$$

Next consider the conditional probability $\mathsf{f}_{X|Y}(x|y)$ for two zero-mean jointly-Gaussian rv s X and Y with a non-singular covariance matrix. From (3.23),

$$\mathsf{f}_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{-(x/\sigma_X)^2 + 2\rho(x/\sigma_X)(y/\sigma_Y) - (y/\sigma_Y)^2}{2(1-\rho^2)}\right],$$

where $\rho = \mathsf{E}[XY]/(\sigma_X\sigma_Y)$. Since $\mathsf{f}_Y(y) = (2\pi\sigma_Y^2)^{-1/2}\exp(-y^2/2\sigma_Y^2)$, we have

$$\mathsf{f}_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left[\frac{-(x/\sigma_X)^2 + 2\rho(x/\sigma_X)(y/\sigma_Y) - \rho^2(y/\sigma_Y)^2}{2(1-\rho^2)}\right].$$

The numerator of the exponent is the negative of the square $(x/\sigma_x - \rho y/\sigma_y)^2$. Thus

$$\mathsf{f}_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left[\frac{-\left[x - \rho(\sigma_X/\sigma_Y)y\right]^2}{2\sigma_X^2(1-\rho^2)}\right]. \qquad (3.37)$$

Solution: Note that $u = y^2$ for $y \in \mathbb{R}$ is not one-to-one. If $U = u$, then Y is either $u^{1/2}$ or $-u^{1/2}$. We then have

$$\mathsf{f}_{X|U}(x|u) = \frac{\mathsf{f}_{XU}(x,u)}{\mathsf{f}_U(u)} = \frac{\mathsf{f}_{XY}(x,\sqrt{u}) + \mathsf{f}_{XY}(x,-\sqrt{u})}{\mathsf{f}_Y(\sqrt{u}) + \mathsf{f}_Y(-\sqrt{u})}.$$

Since $\mathsf{f}_Y(\sqrt{u}) = \mathsf{f}_Y(-\sqrt{u})$, this can be rewritten as

$$\mathsf{f}_{X|U}(x|u) = \frac{\mathsf{f}_{X|Y}(x,\sqrt{y}) + \mathsf{f}_{X|Y}(x,-\sqrt{y})}{2}.$$

Substituting these terms into (3.37) gives a rather ugly answer. The point here is not the answer but rather the approach to finding a conditional probability for a Gaussian problem when the conditioning rv is a non-one-to one function of a Gaussian rv.