بسمه تعالی

فرآیندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۰۵-۱۴۰۴

دکتر ربیعی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

تمرین سوم	فرآیندهای پواسون، گاوسی	زمان تحویل:

۱. در یک شرکت پستی، بسته‌ها طبق یک فرآیند پواسون با نرخ ۶ بسته در ساعت به دفتر مرکزی می‌رسند. برای استفاده‌ی بهینه از زمان و جلوگیری از رفت‌وآمدهای غیرضروری، پستچی تنها زمانی برای توزیع بسته‌ها اعزام می‌شود که سومین بسته نیز به دفتر رسیده باشد.

(آ) امید ریاضی زمانی که از شروع کار دفتر تا زمان ارسال اولین بسته (یعنی رسیدن سومین بسته به دفتر) طول می‌کشد را محاسبه کنید.

(ب) احتمال این که در اولین ساعت شروع به کار دفتر، پستچی برای توزیع بسته‌ها اعزام نشود را به دست آورید.

۲. در یک ایستگاه خدمات اورژانس شهری، تماس‌های اضطراری از سوی شهروندان طبق یک فرآیند پواسون با نرخ λ دریافت می‌شوند.

(آ) فرض کنید تا لحظه‌ی t دقیقاً یک تماس اضطراری دریافت شده است. با دانستن این موضوع، می‌خواهیم تابع توزیع احتمال تجمعی شرطی زمان این تماس را پیدا کنیم (یعنی تابع $F_{S_1|N_t=1}(s)$). از نتیجه‌ی به‌دست‌آمده چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

(ب) اکنون فرض کنید تا لحظه‌ی t دقیقاً دو تماس اضطراری دریافت شده‌اند. توابع توزیع احتمال تجمعی شرطی زمان وقوع تماس اول و تماس دوم را تعیین کنید (به‌ترتیب $F_{S_1|N_t=2}(s)$ و $F_{S_2|N_t=2}(s)$).

۳. در یک شرکت بزرگ فناوری، چهار مرکز داده‌ی مستقل وجود دارد که هر کدام دچار خرابی‌های بزرگ می‌شوند. وقوع این خرابی‌ها در هر مرکز به‌صورت مستقل و طبق یک فرآیند پواسون مدل‌سازی می‌شود. در جدول زیر، مقدار امید زمانی بین دو خرابی بزرگ در هر یک از مراکز داده آمده است. مقدار امید زمانی بین دو خرابی بزرگ در کل شرکت را محاسبه کنید.

مرکز داده	امید زمان بین دو خرابی بزرگ
مرکز تهران	۳ ماه
مرکز تبریز	۴ ماه
مرکز کرمانشاه	۲ ماه
مرکز مشهد	۵ ماه

۴. فرآیند تصادفی ورود را دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی صعودی به صورت $0 < S_1 < S_2 < \dots < S_n$ تعریف می‌کنیم که هر S_i زمان وقوع رخداد iام است. این فرآیند از زمان ۰ آغاز می‌شود. این فرآیند را با دو دسته متغیر تصادفی دیگر نیز نشان می‌دهند. در حالت اول با دنباله متغیرهای تصادفی X_i که فاصله زمانی میان رخدادهای $i-1$ و i است. در حالت دوم، برای زمان دلخواه $t \geq 0$ متغیر $N(t)$ برابر با تعداد رخدادها در بازه زمانی $[0, t]$ تعریف می‌شود.

(آ) نشان دهید $P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n)$

(ب) فرض کنید $X_۱, X_۲, ...$ متغیرهاي تصادفی مثبت iid از تابع چگالی $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ هستند. متغیر $S_n = X_۱ + X_۲ + ...X_n$ را براي همه nهای بزرگتر مساوي یک در نظر بگیرید. نشان دهید براي همه‌ی n های بزرگ‌تر از یک داریم:

$$f_{S_۱,...,S_n}(s_۱, s_۲, ..., s_n) = \lambda^n \exp(-\lambda s_n), \qquad for \quad ۰ \leq s_۱ \leq s_۲ \leq ... \leq s_n \qquad (۱)$$

(ج) برای یک فرآیند پواسون با نرخ λ مقدار $Pr(S_۱, S_۲, S_۳, ..., S_{n-۱}|S_n = t)$ را حساب کنید.

۵. فرض کنید Π یک فرآیند نقطه‌ای پواسون روی بازه‌ی $[۰, \infty)$ با شدت λ باشد. نشان دهید که اگر بدانیم در بازه‌ی واحد دقیقاً یک نقطه وجود دارد، توزیع مکانی آن نقطه یکنواخت است.

۶. فرض کنید $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ به‌صورت $X(t) = tA$ برای همه‌ی $t \in \mathbb{R}$ تعریف شده است، که در آن $A \sim \mathcal{N}(۰, ۱)$ می‌باشد. نشان دهید که $X(t)$ یک فرآیند گاوسی است. میانگین آن را برای هر t و تابع کوواریانس آن را بیابید.

۷. فرض کنید X و Y متغیرهای مشترکا گاوسی با میانگین صفر و واریانس‌های $\sigma_X^۲$ و $\sigma_Y^۲$ با ماتریس کواریانس نرمال شده‌ی ρ باشند.

(آ) اگر $V = Y^۳$، تابع چگالی احتمال شرطی $f_{X|V}(x|v)$ را بیابید.

(ب) اگر $U = Y^۲$، تابع چگالی احتمال شرطی $f_{X|U}(x|u)$ را بیابید.