به نام خدا

فرآیندهای تصادفی
نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۴
دکتر ربیعی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

آزمون پایانترم — زمان امتحان: ۱۵۰ دقیقه

۱. داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_N$ نمونه‌های تصادفی و مستقل از توزیع $U(0,\theta)$ با شرط $\theta > 0$ هستند.

(آ) (۱۰ نمره) یک آماره کافی کامل (CSS) برای θ بیابید. (راهنمایی: طبق قضیه، اگر آماره کافی کامل وجود داشته باشد، آماره‌ی کافی کمینه، کامل نیز هست. بنابراین تنها کافی است که یک آماره کافی کمینه (MSS) پیدا کنید.)

(ب) (۱۵ نمره) به ازای عدد صحیح $k > 0$، یک $UMVUE$ برای $\frac{1}{\theta^k}$ بیابید. (فرض کنید که $N > k$)

۲. (۱۵ نمره) علی یک سکه در اختیار دارد ولی معتقد است که سکه سالم نبوده و احتمال خط در آن بیشتر است.او این نتیجه‌گیری را بر اساس آزمایشی که انجام داده‌است بیان می‌کند. اگر او ۲ بار شیر دیده باشد، تعداد دفعاتی که او باید خط دیده باشد تا ادعایش صحیح باشد چقدر است؟ $(\alpha = 0.05)$

۳. گاهی اوقات نمونه‌گیری مستقیم از توزیع مطلوب $p(z)$ دشوار است، اما مقدار $\tilde{p}(x)$ به راحتی قابل ارزیابی است، که در آن $p(x) = \frac{\tilde{p}(x)}{Z_{\tilde{p}}}$ و $Z_{\tilde{p}}$ یک ثابت نرمال‌سازی است. در این حالت، از روش نمونه‌گیری دیگری به نام Rejection Sampling استفاده می‌کنیم. مراحل Rejection Sampling به شرح زیر است:
ابتدا یک توزیع پیشنهادی $q(x)$ معرفی می‌کنیم که از آن می‌توان به راحتی نمونه‌گیری کرد. سپس یک ثابت k معرفی می‌کنیم که مقدار آن به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $\forall x : kq(x) \geq \tilde{p}(x)$. برای نمونه‌گیری از $p(x)$، ابتدا یک عدد x_0 از توزیع $q(x)$ تولید می‌کنیم. سپس یک عدد u_0 از توزیع یکنواخت بر روی بازه $[0, k \times q(x_0)]$ تولید می‌کنیم. در نهایت، اگر $u_0 > \tilde{p}(x_0)$ باشد، نمونه رد می‌شود، در غیر این صورت x_0 پذیرفته می‌شود.

لطفاً به سوالات زیر پاسخ دهید:

(آ) (۱۵ نمره) ابتدا احتمال پذیرش $\text{Prob}(\text{accept}X|X = x_0)$ را بنویسید و سپس اثبات کنید که فرآیند فوق یک نمونه x_0 از توزیع $p(x)$ تولید می‌کند.

(ب) (۵ نمره) دو مقدار مختلف برای k مانند k_1 و k_2 را در نظر بگیرید که هر دو شرط لازم برای k را ارضا می‌کنند. اگر $k_1 > k_2$ باشد، کدام یک را برای نمونه‌گیری ترجیح می‌دهیم؟ چرا؟

(ج) (۵ نمره) یک نقطه‌ضعف این روش را توضیح دهید.

۴. (۱۰ نمره) فرض کنید $X = [X_0, X_1, X_2, \dots]$ یک فرآیند مارکوف با ماتریس انتقال P باشد. برای هر عدد صحیح غیرمنفی n داریم $P^{(n)}(i,j) = \text{Prob}(X_n = j|X_0 = i)$. سپس برای هر $m \geq 0$ و $n \geq 0$ خواهیم داشت:

$$P^{(m+n)}(i,j) = \Sigma_k P^{(n)}(k,j) \times P^{(m)}(i,k)$$

این معادله به نام معادله Chapman-Kolmogorov شناخته می‌شود. لطفاً این معادله را اثبات کنید.

۵. سه نقطه x_1 ، x_2 و x_3 را به ترتیب به صورت ساعت‌گرد با فاصله‌های برابر روی یک دایره قرار می‌دهیم. یک قدم‌زن به صورت تصادفی در یکی از این نقاط قرار می‌گیرد. این قدم‌زن در هر ثانیه اگر در x_i باشد با احتمال $p_i = \frac{i}{4}$ در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده و با احتمال $1 - p_i$ خلاف جهت آن حرکت می‌کند.

(آ) (۱۵ نمره) این مسئله را به صورت یک فرآیند مارکوف در آورده و توزیع پایای آن را محاسبه کنید.

(ب) (۱۰ نمره) سرعت متوسط این قدم‌زن بر حسب دور بر ثانیه در جهت عقربه‌های ساعت چقدر است؟

۶. (۲۵ نمره) توزیع نمایی برش‌داده‌شده به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$X \sim E(a,b): \quad f_X(x) = \frac{1}{b} e^{-\frac{(x-a)}{b}} I_{[a,\infty)}(x)$$

فرض کنید $X_1, .., X_n \sim E(a,b)$ و $Y_1, Y_2, ..., Y_n \sim E(a', b')$.

۱. یک UMVUE برای $a' - a$ و یک UMVUE برای $\frac{b'}{b}$ بیابید.

۲. کران $Cramer - Rao$ را برای تخمین‌گرهای قسمت قبل محاسبه کنید. آیا برابری برقرار می‌شود؟

۳. فرض کنید $b = b'$. برای b و $\frac{a'-a}{b}$ UMVUE بیابید.

۴. فرض کنید $a' = a$ ثابت کنید UMVUE برای a وجود ندارد.

۵. با فرض قسمت یک تخمین‌گر نااریب مناسب برای a ارائه دهید.

پاسخ‌نامه

سوال ۱

آ)

سوال 1

الف)

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & x<\theta \\ 0 & o.w \end{cases} \Rightarrow f(X|\theta) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i|\theta)$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}(\max_i x_i < \theta)$$

بنابراین $T(\underline{X}) = \max x_i$ یک آماره کافی کمینه است؛ زیرا برای دو دسته داده:

$\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $\underline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$

$$\frac{f(\underline{X}|\theta)}{f(\underline{Y}|\theta)} = \frac{\mathbb{1}(\max_i x_i < \theta)}{\mathbb{1}(\max_i y_i < \theta)} = \frac{\mathbb{1}(T(\underline{X}) < \theta)}{\mathbb{1}(T(\underline{Y}) < \theta)}$$

اگر عبارت فوق مستقل از θ باشد، آنگاه $T(\underline{Y}) = T(\underline{X})$ و برعکس اگر $T(\underline{Y}) = T(\underline{X})$ آنگاه $\frac{f(\underline{X}|\theta)}{f(\underline{Y}|\theta)}$ مستقل از θ است. پس $T(\underline{X})$ یک MSS است

یک پیشود

ب)

ب) با توجه به قسمت قبل و قضیه مذکور،

$T(X)$ یک CSS برای θ است. پس برای $\frac{1}{\theta^k}$ هم یک CSS است.

(توجه کنید که رابطه بین θ و $\frac{1}{\theta^k}$ یک به یک است)

حال کافی است که تابعی برحسب $T(X)$ بیابیم که $E[\phi(T)] = \frac{1}{\theta^k}$

ابتدا توزیع $T(X) = \max X_i$ را می‌یابیم.

$$F_T(t) = P(X_1 \leq t)\, P(X_2 \leq t) \dots P(X_n \leq t) = \frac{t^n}{\theta^n}$$

$$\Rightarrow f_T(t) = \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} \,; 0 \leq t \leq \theta$$

حدس اولیه این است که $\frac{1}{T^k}$ مناسب است

$$E\left[\frac{1}{T^k}\right] = \int_0^\theta \frac{1}{t^k} \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} dt = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^{n-k-1} dt = \frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n-k}}{n-k} = \frac{n}{n-k} \theta^{-k}$$

بنابراین $\frac{n-k}{n} \times \frac{1}{T^k}$ unbiased است. در نتیجه $\frac{n-k}{n} \times \frac{1}{(\max X_i)^k}$ همان UMVUE است

سوال ۲

اگر کل آزمایش‌های او n باشد که ۲ بار آن شیر و بقیه خط بوده است انگاه اگر فرض کنیم سکه سالم است مقدار p-value برای مشاهده ۲ بار یا کمتر شیر در آن برابر است با

$$\frac{\binom{n}{0}}{2^n} + \frac{\binom{n}{1}}{2^n} + \frac{\binom{n}{2}}{2^n}$$

که این مقدار باید کمتر از 0.05 باشد پس داریم

$$\frac{\binom{n}{0}}{2^n} + \frac{\binom{n}{1}}{2^n} + \frac{\binom{n}{2}}{2^n} \leq 0.05$$

$$\frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} + \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{2^n} \leq 0.05$$

$$\frac{2 + 2n + n(n-1)}{2 * 2^n} + \leq 0.05$$

$$2 + n + n^2 + \leq 0.1 * 2^n$$

$$11 \le n$$

بنابر این باید تعداد خط‌های مشاهده شده توسط او بیشتر مساوی ۹ باشد.

سوال ۳

آ)

$\text{Prob}(\text{accept}X|X = x_0) = \frac{\tilde{p}(x_0)}{kq(x_0)}$

فرآیند ذکر شده، نمونه‌گیری از توزیع $\text{Prob}(X = x_0|\text{accept})$ را انجام می‌دهد که برابر است با:

$$\begin{aligned}\text{Prob}(X = x_0|\text{accept}) &= \frac{\text{Prob}(X = x_0, \text{accept})}{\text{Prob}(\text{accept})} \\ &= \frac{\text{Prob}(\text{accept}|X = x_0) \times \text{Prob}(X = x_0)}{\text{Prob}(\text{accept})} \\ &= \frac{(\frac{\tilde{p}(x_0)}{kq(x_0)}) \times (q(x_0))}{\int_X (\frac{\tilde{p}(X)}{kq(X)}) \times (q(X))} \\ &= \frac{\frac{\tilde{p}(x_0)}{k}}{\frac{Z_{\tilde{p}}}{k}} = \frac{\tilde{p}(x_0)}{Z_{\tilde{p}}} = p(x_0)\end{aligned} \quad (۱)$$

ب)

هرچه مقدار k بزرگ‌تر باشد، احتمال $u_0 > \tilde{p}(x_0)$ بیشتر می‌شود. بنابراین نرخ رد شدن نمونه‌ها افزایش می‌یابد. به همین دلیل ترجیح می‌دهیم مقدار k تا حد ممکن کوچک باشد، تا توزیع پیشنهادی به توزیع هدف نزدیک‌تر شده و نرخ رد شدن کاهش یابد.

ج)

خود فرآیند رد شدن. بخشی از نمونه‌ها رد می‌شوند، بنابراین برای به‌دست آوردن نمونه‌های موردنظر، تعداد مراحل بیشتری نسبت به تعداد واقعی نمونه‌های موردنیاز لازم است.

سوال ۴

مرحله پایه:

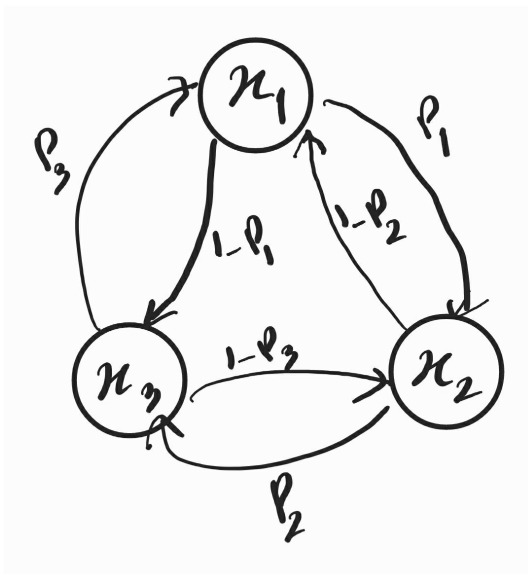
$$P^{(0)}(i,j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (۲)$$

حال فرض کنید $m \ge 1, n \ge 1$:

$$
\begin{aligned}
P^{(m+n)}(i,j) &= \text{Prob}(X_{m+n}=j|X_0=i) \\
&= \Sigma_k \text{Prob}(X_{m+n}=j|X_m=k, X_0=i)\times \text{Prob}(X_m=k|X_0=i) \\
&= \Sigma_k \text{Prob}(X_n=j|X_0=k)\times \text{Prob}(X_m=k|X_0=i) \\
&= \Sigma_k P^{(n)}(k,j)\times P^{(m)}(i,k)
\end{aligned} \tag{۳}
$$

سوال ۵

(آ) فرآیند مارکوف متناظر با این مسئله را در شکل آ مشاده می‌کنید



شکل ۱: فرآیند مارکوف نقاط روی دایره

برای توزیع پایای آن داریم:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1-p_2 & p_3 \\ p_1 & 0 & 1-p_3 \\ 1-p_1 & p_2 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} -1 & 1-p_2 & p_3 \\ p_1 & -1 & 1-p_3 \\ 1-p_1 & p_2 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

در عبارات بالا یکی از آن‌ها زاید بوده و از روی بقیه قابل محاسبه است پس عبارت اول را حذف کرده و به جای آن رابطه زیر را جایگزین می‌کنیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & -1 & 1-p_3 \\ 1-p_1 & p_2 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

حال مقادیر احتمال‌ها را جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -1 & 1-\frac{3}{4} \\ 1-\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{4} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه داریم:

$$x_1 = \frac{2}{5}$$
$$x_2 = \frac{1}{5}$$
$$x_3 = \frac{2}{5}$$

(ب) برای سرعت متوسط قدم‌زن داریم:

$$\frac{1}{3}(\frac{2}{5}\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\frac{3}{4}) - \frac{1}{3}(\frac{2}{5}\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\frac{1}{4})$$

$$\frac{1}{3}(\frac{2}{20} + \frac{2}{20} + \frac{6}{20}) - \frac{1}{3}(\frac{6}{20} + \frac{2}{20} + \frac{2}{20})$$

$$\frac{1}{3}(\frac{10}{20}+) - \frac{1}{3}(\frac{10}{20}) = 0$$

سوال امتیازی

۱)

راه حل سوال امتیازی آزمون پایانی درس فرآیندهای تصادفی:

۱- الف) برای توزیع $E[a,b]$، $X_{(1)}, \sum(X_i - X_{(1)})$ برای پارامترهای (a,b) یک complete statistic است. و داریم:

$$E[X_{(1)}] = \frac{b}{n} + a \qquad E\left[\sum X_i - X_{(1)}\right] = (n-1)b$$

برای $a'-a$ می‌توان یک UMVUE به صورت زیر پیدا کرد:

$$T(X,Y) = \left(Y_{(1)} - \frac{1}{n-1}(\bar{Y} - Y_{(1)})\right) - \left(X_{(1)} - \frac{1}{n-1}(\bar{X} - X_{(1)})\right)$$

برای $\frac{b'}{b}$، کافیست دو تخمین‌گر مستقل نااریب برای b' و $\frac{1}{b}$ پیدا کنیم.

$$T_1 = \frac{n}{n-1}(\bar{Y} - Y_{(1)})$$

توزیع: $\left(\bar{X} - X_{(1)} \sim Gamma(n-1, \frac{n}{b})\right.$

$$E\left[\frac{1}{\bar{X} - X_{(1)}}\right] = \frac{n}{(n-2)b}$$

$$T_2 = \frac{n-2}{n}\left(\frac{1}{\bar{X} - X_{(1)}}\right)$$

$$E[T_1 T_2] = E\left[\frac{n-2}{n-1}\,\frac{\bar{Y} - Y_{(1)}}{\bar{X} - X_{(1)}}\right] = \frac{b'}{b}$$

درنتیجه $T = T_1 T_2$ یک تخمین‌گر unbiased برای $\frac{b'}{b}$ است.

هردو تخمین‌گرهای $\frac{b'}{b}$ و $a'-a$، تابعی از complete statistic بودند و خود نیز unbiased بودند. درنتیجه UMVUE هستند.

۲)

۳) برای تخمین گر $\hat{a}$ واریانس را حساب می‌کنیم.

$$\mathrm{var}\left(Y_{(1)} - \frac{1}{n-1}\left(\bar{Y} - Y_{(1)}\right)\right) = \mathrm{var}(Y_{(1)}) + \frac{1}{(n-1)^2}\mathrm{var}\left(\bar{Y} - Y_{(1)}\right)$$

$$= \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{1}{(n-1)^2}\left(\frac{b}{n}\right)^2$$

$$= \left(1 + \frac{1}{(n-1)^2}\right)\left(\frac{b}{n}\right)^2$$

$$I(a) = E\left[\left(\frac{d}{da}\log f(x|a)\right)^2\right]$$

$$\frac{d}{da}\log f(x|a) = \frac{d}{da}\sum -\log b - \left(\frac{x_i - a}{b}\right) \quad \forall i;\ x_i \geq a$$

$$\frac{d}{da}(-\infty) \quad \exists j;\ x_j < a$$

$$= \frac{n}{b}\mathbb{1}(\forall i;\ x_i \geq a)$$

چون تخمین گر unbiased است کران ... به صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{1}{\left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad x_i \geq a \to \left(\frac{b}{n}\right)^2 \mathbb{1}(\forall i;\ x_i \geq a) = \frac{1}{I(a)}$$

$$\mathrm{var}\left(Y_{(1)} - \frac{1}{n-1}\left(\bar{Y} - Y_{(1)}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{(n-1)^2}\right)\left(\frac{b}{n}\right)^2 > \frac{1}{I(a)}$$

در نتیجه برابری برقرار نمی‌شود.

۳)

ج) با فرض $b = b'$، $\underbrace{\sum Y_i - Y_{(1)}}_{\Delta Y} + \underbrace{\sum X_i - X_{(1)}}_{\Delta X}$ یک Complete statistic برای b است.

$$E[\Delta Y + \Delta X] = \cancel{\quad} \, 2(n-1)b$$

$$\rightarrow \cancel{\rightarrow} \frac{1}{2(n-1)}(\Delta Y + \Delta X) \rightarrow \text{unbiased}$$ یک تخمین‌گر برای b

تابعی از complete statistic $+$ $\rightarrow$ UMVUE

همچنان $X_{(1)}, Y_{(1)}$ مشترکاً complete

$$E[X_{(1)} - Y_{(1)}] = a' - a$$

طبق قسمت (الف):

$$E\left[\frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{\bar{X} - X_{(1)}}\right] = \frac{1}{b}$$

در نتیجه: ($\bar{X} - Y_{(1)}$، $X_{(1)}$، $Y_{(1)}$ از هم مستقل هستند)

$$\rightarrow E\left[\underbrace{\frac{(X_{(1)} - Y_{(n)})}{\bar{X} - X_{(1)}} \cdot \frac{n-2}{n}}_{T_3}\right] = \frac{a' - a}{b}$$

در نتیجه T_3 یک UMVUE برای $\frac{a'-a}{b}$ است.

۴، ۵)

د) $Y_1,\dots,Y_n \sim E(a,b') \quad X_1,\dots,X_n \sim E(a,b)$

$$f(x \mid a,b,b') = \frac{1}{b^n b'^n}\,\mathbb{1}(X_{(1)} \geq a)\,\mathbb{1}(Y_{(1)} \geq a) \times e^{-\frac{\sum X_i - na}{b}} \times e^{-\frac{\sum Y_i - na}{b'}}$$

در این حالت نیز $X_{(1)}, Y_{(1)}$ و $\sum X_i - X_{(1)}$, $\sum Y_i - Y_{(1)}$ minimal sufficient هستند. اما complete نیستند.

$E[W \mid X_{(1)}]$

زیرا که داریم:

$$E\left[\frac{nY_{(1)} - \bar{Y}}{n-1} - \frac{nX_{(1)} - \bar{X}}{n-1}\right] = 0$$

اما تابع تعریف شده تابع صفر نیست.

ه) خود $\frac{nY_{(1)} - \bar{Y}}{n-1}$, $\frac{nX_{(1)} - \bar{X}}{n-1}$ یک تخمین‌گر نااریب از a هستند، به حال اگر $\frac{nY_{(1)} - \bar{Y}}{n-1} + \frac{nX_{(1)} - \bar{X}}{n-1}$ را در نظر بگیریم یک تخمین‌گر با واریانس کمتر برای a به ما می‌دهد.