به نام خدا

فرآیندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۰۴-۱۴۰۳

مدرس: دکتر ربیعی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

کوییز سری پنجم (۱۰۰ نمره) | Gaussian Process | زمان پاسخ گویی : ۲۰ دقیقه

سوال ۱

میدانیم Brownian motion یک فرآیند گاوسی است به طوری که در آن داریم $cov[W_t, W_s] = min(t, s)$
از طرفی به صورت شهودی یک بادکنک بزرگ با قطر ۱۰۰ متر را در یک استادیوم فوتبال در نظر بگیرید. بادکنک در بالای سر هواداران قرار دارد. از آنجا که آن‌ها هیجان زده هستند، در زمان‌های مختلف و با جهات مختلف، با حرکت‌های تصادفی، به بادکنک ضربه می‌زنند. در پایان، بادکنک به‌طور تصادفی در جهت‌های مختلف هل داده می‌شود؛ ولی امید ریاضی جابجایی آن صفر است. (در این مثال حرکت بادکنک را یک Brownian motion در نظر گرفتیم.)

الف) حال اگر W_t یک Brownian motion باشد و فرآیند جدید X_t به صورت زیر تعریف شود :

$$X_t = \xi W_t$$
$$\xi \sim N(1, 1)$$

و بدانیم W_t و ξ مستقل از هم هستند، آنگاه تابع کوواریانس فرآیند X_t را بدست آورید. (ξ^2 مستقل از $W_t W_s$) (۴۰ نمره)

ب) اگر همچنان W_t یک Brownian motion باشد و فرآیند Y به صورت زیر تعریف شود :

$$Y_t = \xi + W_t$$
$$\xi \sim N(1, 1)$$

و همچنان W_t و ξ مستقل از هم باشند، آنگاه $var(Y_t + Y_s)$ را بدست آورید. (۶۰ نمره)

الف)

با توجه به مثال گفته شده میانگین Brownian motion صفرا است.

$$E[W_t] = E[W_s] = 0$$
$$cov(\xi W_t, \xi W_s) = E[\xi^2 W_t W_s] - E[\xi W_t]E[\xi W_s]$$
$$= E[\xi^2]E[W_t W_s] - (E[\xi])^2 E[W_t]E[W_s] = (1 + 1^2)E[W_t W_s] - 0^2.0.0$$
$$= 2min(t, s)$$

ب)

$$var[Y_t + Y_s] = var[Y_t] + var[Y_s] + 2cov[Y_t, Y_s]$$
$$var[Y_t] = var[\xi + W_t] = var[\xi] + var[W_t] = 1 + t$$
$$var[Y_s] = var[\xi + W_s] = var[\xi] + var[W_s] = 1 + s$$
$$cov[Y_t, Y_s] = E[Y_t Y_s] - E[Y_t]E[Y_s] = E[(\xi + W_t)(\xi + W_s)] - 1$$
$$= E[\xi^2] + E[\xi W_t] + E[\xi W_s] + E[W_t W_s] - 1 = 1 + 0 + 0 + min(t, s)$$
$$var[Y_t + Y_s] = 4 + t + s + 2min(t, s)$$