به نام خدا

فرآیندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۰۴-۱۴۰۳

مدرس: دکتر ربیعی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

کوییز سری چهارم (۱۰۰ نمره) | Poisson Process and Point Process | زمان پاسخ گویی : ۲۵ دقیقه

سوال ۱ (۵۰ نمره)

فرض کنیم $N_1(t)$ و $N_2(t)$ دو فرآیند پواسون مستقل با نرخ‌های به ترتیب $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 2$ هستند. فرآیند جدید $N(t)$ را به این شکل تعریف میکنیم $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$

الف) احتمال اینکه $N(1) = 2$ و $N(2) = 5$ را بیابید. (منظور توزیع توأم است.) (۲۰ نمره)

ب) به شرط اینکه $N(1) = 2$ باشد، احتمال $N_1(1) = 1$ را بیابید. (۳۰ نمره)

a) $N(t) \sim Poisson$ with rate $\lambda = 1 + 2 = 3$

$$P(N(1) = 2, N(2) = 5) = P(2\ in\ (0,1]\ and\ 3\ in(1,2]) = [\tfrac{e^{-3}3^2}{2!}][\tfrac{e^{-3}3^3}{3!}]$$

b) $$P(N_1(1) = 1|N(1) = 2) = \frac{P(N_1(1)=1, N(1)=2)}{P(N(1)=2)} = \frac{P(N_1(1)=1, N_2(1)=1)}{P(N(1)=2)}$$

$$\frac{P(N_1(1)=1).P(N_2(1)=1)}{P(N(1)=2)} = \frac{e^{-1}2e^{-2}}{\frac{e^{-3}3^2}{2!}}$$

سوال ۲ (۵۰ نمره)

یک فروشگاه آنلاین یک حراجی بزرگ برگزار کرده است به طوری که برای هر دسته از اقلام کوپن خاصی در نظر گرفته و این کوپن‌ها را از طریق ایمیل برای مشتریان خود ارسال میکند. ما به عنوان مشتری کنجکاو این فروشگاه متوجه شدیم که کوپن‌ها مطابق یک فرآیند پواسون با نرخ λ برای ما ایمیل میشوند. میدانیم $m \geq 2$ نوع، کوپن (مثل کوپن مواد غذایی، کوپن لوازم خانگی و...) وجود دارد و هر کوپنی که به دست ما میرسد با احتمال p_j متعلق به نوع j ام است. $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$ $\quad j = 1, 2, .., m$

به صورت میانگین چقدر طول میکشد تا از هر نوع کوپن حداقل یکی جمع کرده باشیم؟

Consider $N_j(t)$ the number of type j coupons arrive in [0, t]

$\{N_j(t), t \geq 0\}; j = 1, 2, ..., m$ are m independent Poisson processes with rates $\lambda p_1, \lambda p_2, ..., \lambda p_m$

X_j = first interval time of $\{N_j(t), t \geq 0\}; j = 1, 2, ..., m$ then $X_j \sim Exp(\lambda p_j); j = 1, 2, ..., m$ (independent)

X = time until at least one of each type of coupon is collected →X = max{ $X_1, X_2, ...X_m$}

$$E[X] = \int_0^\infty p(X > x)dx = \int_0^\infty 1 - p(each\ of\ X_1, ..., X_m \leq x)dx$$

$$E[X] = \int_0^\infty 1 - \prod_{j=1}^{m} p(X_j \leq x)dx$$

$$E[X] = \int_0^\infty 1 - \prod_{j=1}^{m} [1 - e^{-(\lambda p_j)x}]dx$$