بنا بر تعریف داریم:

$$P_{ij}(n) = P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

فرض کنید Y یک زنجیر مارکوف مستقل باشد (از روی X)

$$\xrightarrow{\text{بنا بر استقلال}} P_{ij}(n) = P(X_n = j \mid X_0 = i, Y_0 = k)$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} P(X_n = j, T = m \mid X_0 = i, Y_0 = k) + P(X_n = j, T \geq n \mid X_0 = i, Y_0 = k)$$

چون Y و X لحظه T هم‌اند هستن

$$= \underbrace{\sum_{m=1}^{n-1} P(Y_n = j, T = m \mid X_0 = i, Y_0 = k)} + P(X_n = j, T \geq n \mid X_0 = i, Y_0 = k)$$

$$= \underbrace{P(Y_n = j, T < n \mid X_0 = i, Y_0 = k)}_{<} + \underbrace{P(X_n = j, T \geq n \mid X_0 = i, Y_0 = k)}_{<}$$

$$< P(Y_n = j \mid X_0 = i, Y_0 = k) + P(T \geq n \mid X_0 = i, Y_0 = k)$$

$$\xrightarrow{\text{استقلال } X \text{ و } Y} = P(Y_n = j \mid Y_0 = k) + P(T \geq n \mid X_0 = i, Y_0 = k)$$

$$= P_{kj}(n) + P(T \geq n \mid X_0 = i, Y_0 = k)$$

$$\Rightarrow P_{ij}(n) < P_{kj}(n) + P(T \geq n \mid X_0 = i, Y_0 = k)$$

$$\Rightarrow P_{ij}(n) - P_{kj}(n) \leq P(T \geq n \mid X_0 = i, Y_0 = k)$$

از آنجایی که X و Y قابل تعویض هستند (کاملا Couple هستن) $\Longleftarrow$ برعکس آن نیز برقرار است پس:

$$|P_{ij}(n) - P_{kj}(n)| \leq P(T \geq n \mid X_0 = i, Y_0 = k)$$

با جمع زدن روی kها داریم:

$$|P_{ij}(n) - \pi_j| \leq P(T \geq n \mid X_0 = i)$$

حال فرض کنید T اولین زمانی باشد که X و Y در یک state قرار می‌گیرند و نیز داریم

$$|P_{ij} - \pi_j| \le P(T \ge n \mid X_0 = i) \qquad (1)$$

طبق قانون احتمال داریم:

$$P(T\ge n \mid X_0=i) = P(T\ge n \mid T\ge n-1, X_0=i)\,P(T\ge n-1 \mid X_0=i)$$
$$+ \underbrace{P(T\ge n \mid T\le n-1, X_0=i)}_{0}\,P(T\le n-1 \mid X_0=i)$$
$$= P(T\ge n \mid T\ge n-1, X_0=i)\,P(T\ge n-1 \mid X_0=i)$$

به صورت بازگشتی داریم:

$$P(T\ge n \mid X_0=i) = \prod_{r=0}^{n-1} P(T>r+1 \mid T>r, X_0=i) \qquad \underbrace{P(T>0 \mid X_0=i)}_{=1}$$

چون احتمال ۰ در P_{ij} است بنابراین یک احتمال مثبت وجود دارد که X و Y در گام بعدی در یک state قرار بگیرند (تعداد حالات محدود است) این احتمال حداقل برابر $\min(P_{ij})^2$ است.

از طرفی $P(T>r+1 \mid T>r, X_0=i)$ برابر است با احتمال اینکه X و Y در گام $r+1$ جفت نباشند به شرط اینکه تا r جفت نشده باشند که با توجه به قبل یعنی

$$P(T>r+1 \mid T>r, X_0=i) \le 1-\varepsilon^2 < 1$$

بنابراین

$$(2) \quad P(T\ge n \mid X_0=i) \le (1-\varepsilon^2)^n$$

$$(1),(2) \Rightarrow |P_{ij} - \pi_j| \le (1-\varepsilon^2)^n$$

$$\Rightarrow \lambda = 1-\varepsilon^2 \in (0,1)$$