۱.

$$\lambda(t) = \lambda + \sum_{t_i<t} \mu(t-t_i)$$

۲.

$$\rho = \int_0^{+\infty} \mu(s)\, ds$$

برای یک فرد مشخص که در نقطه‌ی صفر مهاجرت کرده، $\mu(t)$ نرخ فرزندآوری وی در لحظه‌ی t است. اگر تعداد فرزندان وی را تا لحظه‌ی t، $Z(t)$ بنامیم:

$$\mu(s) = \frac{E[dZ(t)]}{dt} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \mu(s)\, dt = E\left[\int dZ(t)\right] = E[Z] = \rho$$

در نتیجه ρ میانگین تعداد فرزندانی است که این فرد به دنیا می‌آورد. اگر Z_i را تعداد نوادگان نسل iام یک فرد مهاجر بنامیم:

$$E[Z_i] = \rho E[Z_{i-1}]$$

$$\rightarrow E[Z_i] = \rho^i$$

$$\rightarrow E\left[\sum Z_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} E[Z_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i = \frac{\rho}{1-\rho}$$

در نتیجه به طور میانگین به ازای هر فرد مهاجر، $\frac{\rho}{1-\rho}$ فرد داریم که

نه بومی هستند و نه مهاجر، در نتیجه به طور میانگین

کسر افراد غیربومی مهاجر $1-p = \frac{1}{1+\frac{p}{1-p}}$

می‌شود که همان احتمال مهاجر بودن یک فرد غیربومی است.

۳-

$$\lambda(t) = \lambda + \sum_{t_i<t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)}$$

$$\to f(t_1,\dots,t_K) = \prod_{i=1}^{K} \lambda(t_i)\, e^{-\int_0^{t_K} \sum_{t_i<t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} + \lambda}$$

$$\to \log f(t_1,\dots,t_K) = \sum_{i=1}^{K} \log \lambda(t_i)$$

$$-\left(\int_0^{t_1} \lambda\, dt + \sum_{i=1}^{K-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda(t)\, dt\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{K} \log \lambda(t_i) - \int_0^{t_K} \lambda - \alpha \sum_{i=1}^{K-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=1}^{i} e^{-\beta(t-t_j)}\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^{K} \log\left(\lambda + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha e^{-\beta(t_i-t_j)}\right) - \lambda t_K - \alpha \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=1}^{i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\beta(t-t_j)}\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^{K} \log(\lambda + \alpha A(i)) - \lambda t_K + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=1}^{i} \left(e^{-\beta(t_{i+1}-t_j)} - e^{-\beta(t_i-t_j)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{K} \log(\lambda + \alpha A(i)) - \lambda t_K + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^{K-1} \left(e^{-\beta(t_K-t_i)} - e^{-\beta(t_i-t_i)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{K} \log(\lambda + \alpha A(i)) - \lambda t_K + \frac{\alpha}{\beta} (A_K - K + 1)$$

۴_ تابع loglikelihood:

$$l = \sum_{i=1}^{K} \log(\lambda + \alpha A_i) - \lambda t_K + \frac{\alpha}{\beta}(A_K - K + 1)$$

$$\frac{dl}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\lambda + \alpha A_i} - t_K \quad (1)$$

$$\frac{d^2 l}{d\lambda^2} = \sum_{i=1}^{K} \frac{-1}{(\lambda + \alpha A_i)^2} < 0 \quad (2)$$

با توجه به (۲)، مشتق دوم l، منفی است، پس تابع مقعر است. مشتق l هم یک تابع نزولی است، با توجه به این که

$$\sum \frac{1}{A_i} > \alpha t_K$$

در نتیجه $\frac{dl}{d\lambda}(0) > 0$ و برای $\lambda \to \infty$ هم $\frac{dl}{d\lambda} = -t_K$ که یک عدد منفی است. پس دقیقاً در یک نقطه $\frac{dl}{d\lambda} = 0$

اما چون این تابع مقعر است نقطه‌ای که مشتق آن صفر شود ماکسیمم سراسری یکتای آن است. در نتیجه یک MLE یکتا داریم.