mid-stochastic-fall2022-solution

November 2022

1 Q1

1.1 1

Obviously not!

1.2 2

ب) درست

Suppose that for a Poisson process at rate λ, we condition on the event $\{N(t) = 1\}$, the event that exactly one arrival ocurred during $(0, t]$. We might conjecture that under such conditioning, t_1 should be uniformly distributed over $(0, t)$. To see that this is in fact so, choose $s \in (0, t)$. Then

$$\begin{aligned}
P(t_1 \leq s | N(t) = 1) &= \frac{P(t_1 \leq s, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} \\
&= \frac{P(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} \\
&= \frac{e^{-\lambda s} \lambda s e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t} \lambda t} \\
&= \frac{s}{t}.
\end{aligned}$$

2 Q2

ادعا می‌کنیم برای هر $\alpha \in [0,1]$ می‌توان این کار را انجام داد. آزمایشی را به این صورت طراحی می‌کنیم که بسط اعشاری α در مبنای ۲ را در نظر می‌گیریم. در هر مرحله اگر بیت iام ۱ بود و سکه ۰ آمد Accept می‌کنیم. اگر بیت iام ۰ بود و سکه ۱ آمد reject می‌کنیم در غیر این صورت سراغ بیت بعدی می‌رویم. ابتدا ثابت می‌کنیم جمع این احتمال‌ها ۱ است و آزمایش تمام می‌شود.

مرحله‌ی iام را در نظر بگیرید. از آن جا که در مرحله‌ی iام هستیم یعنی از ۱ تا $i-1$ مرحله گذشتیم که احتمال این امر $(\frac{1}{2})^{i-1}$ است در این مرحله با توجه به بیت α به احتمال $\frac{1}{2}$ یا Accept یا reject می‌شویم و به احتمال $(\frac{1}{2})$ به مرحله‌ی بعد می‌رویم. پس احتمال تمام شدن بازی در مرحله‌ی iام $(\frac{1}{2})^i$ است.

$$P(\text{تمام شدن}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{تمام شدن در } i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1$$

حال ثابت می‌کنیم احتمال Accept شدن در این آزمایش برابر α است. برای این کار کافی است نشان دهیم که هرجا در نمایش α عدد ۱ می‌بینیم $(\frac{1}{2})^i$ احتمال دارد بازی را ببریم. برای این کار فرض کنید رقم iام α برابر ۱ باشد احتمال این که در این مرحله Accept شویم برابر حاصلضرب احتمال رسیدن به این مرحله که $(\frac{1}{2})^{i-1}$ است در احتمال بردن در این مرحله که $(\frac{1}{2})$ است می‌باشد (از ۲ حالت ۱ و تاس ۱ و ۱ و تاس ۰ باید ۱ و تاس ۰ اتفاق بیافتد) بنابراین به ازای ۱ در نمایش اعشاری α یک $(\frac{1}{2})^i$ داریم. حاصل جمع این $(\frac{1}{2})^i$ها همان بسط اعشاری مبنای ۲ α می‌باشد بنابراین احتمال Accept، α است.

3 Q3

پرسش سوم:

n

$$P(T_1,\dots,T_{n-1}|T_n) = \frac{P(T_1,\dots,T_{n-1},T_n)}{P(T_n)}$$

$$P(T_1,\dots,T_n) = P(T_n|T_1,\dots,T_{n-1})P(T_1,\dots,T_{n-1})$$

$$= e^{-\lambda(T_n - T_{n-1})}\, p(T_1,\dots,T_{n-1})$$

$P(T_1,\dots,T_n) = e^{-\lambda T_n}$ با استقرای n بدست می‌آید:

T_n : مجموع n متغیر نمایی مستقل $\rightarrow T_n \sim \lambda^n T_n^{n-1} e^{-\lambda T_n}$.

$$\rightarrow P(T_1,\dots,T_{n-1}|T_n) = \frac{e^{-\lambda T_n}}{\lambda^n T_n^{n-1} e^{-\lambda T_n}} = \lambda^{-n} T_n^{-(n-1)}$$

$$= ۷^n T_n^{-(n-1)}$$

(۲

$$E\left[(T_n - T_{n-1}) + (T_n - T_{n-۲}) + \dots + (T_n - T_1)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} E[T_n - T_i] = \sum_{i=1}^{n-1} ۷\,\lambda(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda i$$

$$= ۷ \times \frac{n(n-1)}{۲} = ۷ \times \frac{۱۰ \times ۹}{۲}$$

→ مقدار گوشت = ۷×۴۵×۰٫۱ کیلوگرم

(۳

$$P(T_K \leq s \mid N_t=n) = P(N_s \geq K \mid N_t=n)$$

$$= \sum_{i=K}^{n} P(N_s = i \mid N_t=n) = \sum_{i=K}^{n} \frac{P(N_s=i, N_{t-s}=n-i)}{P(N_t=n)}$$

$$= \sum_{i=K}^{n} \frac{e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^i}{i!} \times e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^{n-i}}{(n-i)!}}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}}$$

$$= \sum_{i=K}^{n} \frac{s^i (t-s)^{n-i}}{t^n} \cdot \binom{n}{i} = \sum_{i=K}^{n} \left(\frac{s}{t}\right)^i \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-i} \binom{n}{i}$$

$$\rightarrow F_{T_K}(s \mid N_t=n) = \sum_{i=K}^{n} \left(\frac{s}{t}\right)^i \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-i} \binom{n}{i}$$

(۴

$$E\left[\sum_{K=1}^{n}(t-T_K) \mid N_t=n\right]$$

$$= \sum_{K=1}^{n} E[t-T_K \mid N_t=n] = \sum_{K=1}^{n} \int_0^T P(T_K \leq s \mid N_t=n)\, ds$$

$$= \sum_{K=1}^{n} \int_0^t \sum_{i=K}^{n} \left(\frac{s}{t}\right)^i \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-i} \binom{n}{i} ds$$

$$= \int_0^t \sum_{K=1}^{n} K \left(\frac{s}{t}\right)^K \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-K} \binom{n}{K} ds = t \sum_{K=1}^{n} \int_0^1 K p^K (1-p)^{n-K} \binom{n}{K} dp$$

$$= \sum_{K=1}^{n} t K \binom{n}{K} \left(\frac{(n+1)!}{K!(n-K)!}\right)^{-1} = \frac{t}{n+1} \sum_{K=1}^{n} K = \frac{tn}{\text{۲}}$$

4 Q4

4.1 1

(آ) برای فرایند داده شده داریم:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right] &= \mathbb{E}\left[X_1\left(t\right)\right] + \mathbb{E}\left[cX_2\left(t\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_1\left(t\right)\right] + \mathbb{E}\left[c\right]\mathbb{E}\left[X_2\left(t\right)\right] \\
&= \eta_1 + 0.5\eta_2
\end{aligned}
$$

این در حالی است که برای sample path ای که c=0 می‌باشد $X\left(t\right) = X_1\left(t\right)$ می‌باشد که در نتیجه وقتی $T \to \infty$ میانگین بدست آمده برابر $\eta_T \to \eta_1$ خواهد بود. بنابراین فرایند داده شده Mean Ergodic نمی‌باشد.

4.2 2

$$\eta_t = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(a\cos(\omega_1 t) + b\cos(\omega_2 t) + c\right)dt =$$

$$\frac{a}{2T\omega_1}\sin(\omega_1 t)\Big|_{t=-T}^{T} + \frac{b}{2T\omega_2}\sin(\omega_2 t)\Big|_{t=-T}^{T} + \frac{c}{2T}\,t\Big|_{t=-T}^{T}$$

$$= \frac{a}{\omega_1 T}\sin(\omega_1 T) + \frac{b}{\omega_2 T}\sin(\omega_2 T) + C$$

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{Var}(\eta_t)} \Rightarrow \mathbb{E}\left[\left(\frac{a}{\omega_1 T}\sin(\omega_1 T) + \frac{b}{\omega_2 T}\sin(\omega_2 T) + C - \overset{\eta}{C}\right)^2\right]$$

$$\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}\left[\frac{a^2}{\omega_1^2 T^2}\sin^2(\omega_1 T) + \frac{b^2}{\omega_2^2 T^2}\sin^2(\omega_2 T) + \frac{2ab}{\omega_1\omega_2 T^2}\sin(\omega_1 T)\sin(\omega_2 T)\right] = 0$$

است Mean Ergodic

4.3 3

(ج) مشابه بخش قبل ابتدا WSS بودن یا نبودن فرایند را بررسی می‌کنیم:

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right] = A\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega t + \phi\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(\omega t + \theta\right) d\theta = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)\right] &= A^2\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega t_1 + \phi\right)\cos\left(\omega t_2 + \phi\right)\right] \\
&= \frac{A^2}{2}\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1 - t_2\right)\right) + \cos\left(\omega\left(t_1 + t_2\right) + 2\phi\right)\right] \\
&= \frac{A^2}{2}\left[\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1 - t_2\right)\right)\right] + \mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1 + t_2\right) + 2\phi\right)\right]\right] \\
&= \frac{A^2}{2}\cos\left(\omega\left(t_1 - t_2\right)\right)
\end{aligned}$$

بنابراین فرایند WSS می‌باشد. حال طبق قضیه Slutsky داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T C\left(\tau\right)d\tau &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{A^2}{2}\cos\left(\omega\tau\right)d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2\omega\tau}\sin\left(\omega\tau\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

بنابراین فرایند Mean Ergodic می‌باشد.

5 Q5

$$\underset{\sim}{y}(t) = 2\underset{\sim}{x}(t) + 3\underset{\sim}{x}'(t) \qquad \eta_x = 5 \qquad C_{xx}(\tau) = 4e^{-2|\sigma|}$$

The process $\underset{\sim}{y}(t)$ is the output of the system $H(s) = 2+3s$ with input $\underset{\sim}{x}(t)$. Hence, $\eta_y=5H(0)=10$

$$S_{yy}{}^c(\omega) = S_{xx}{}^c(\omega)|2+3j\omega|^2 = \frac{16}{4+\omega^2}(4+9\omega^2) = 144 - \frac{512}{4+\omega^2} = S_{yy}(\omega) - 2\pi\eta_y{}^2\delta(\omega)$$

$$S_{yy}(\omega) = 144 - \frac{512}{4+\omega^2} + 2\pi(10)^2\delta(\omega)$$

$$\cancel{R_{yy}(\tau) = 144\delta(\tau) - 128\frac{2(2)}{2^2+\omega^2}}$$

$$S_{yy}(\omega) = 144 - 128\frac{2(2)}{2^2+\omega^2} + 2\pi(100)\delta(\omega)$$

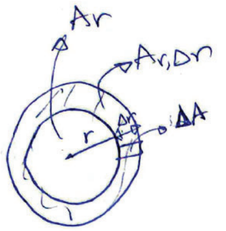
$$= 144\delta(\tau)\cancel{(2\pi)} - 128e^{-a|\tau|} + 100$$

$$= 288\pi\delta(\tau) - 128e^{-a|\tau|} + 100$$

6 Q6

پرسش ششم :

۱) نزدیک‌ترین نقطه



$n(A)$: تعداد نقاط داخل A

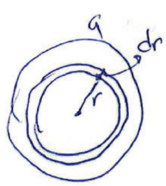
$$P(X_0 \in A_{r,\Delta r}) = P(n(A_r)=0,\ n(A_{r,\Delta r}) \geq 1)$$
$$= e^{-\lambda S(A_r)}\left(1-e^{-\lambda S(A_{r,\Delta r})}\right)$$

$$\rightarrow P(X_0 \in \Delta A) = \frac{\Delta A}{S(A_{r,\Delta r})}\, e^{-\lambda S(A_r)}\left(1-e^{-\lambda S(A_{r,\Delta r})}\right)$$

$$\rightarrow \lim_{dA\to 0} \frac{P(X_0 \in dA)}{dA} = \lim_{dA\to 0} e^{-\lambda \pi r^2}\left(\frac{1-e^{-\lambda S(A_{r,dr})}}{S(A_{r,dr})}\right)$$

$$= \lambda e^{-\lambda\pi r^2} \rightarrow f(X_0) = e^{-\lambda \pi r(x_0)^2}$$

دورترین نقطه (بشرط وجود در دیسک به شعاع a):



$$P(X_a \in A_{r,dr} \mid n(A_a) \geq 1)$$
$$= \frac{P(X_a \in A_{r,dr},\ n(A_a) \geq 1)}{P(n(A_a)\geq 1)}$$
$$= \frac{\left(1-e^{-\lambda S(A_{r,dr})}\right)\cdot e^{-\lambda S(A_{r+dr,a})}}{1-e^{-\lambda S(A_a)}}$$

$$\rightarrow f(X_a \mid n(A_a) \geq 1) = \frac{\lambda e^{-\lambda\pi(a^2-r^2)}}{1-e^{-\lambda\pi a^2}}$$

۲)

~~$Cov(X, X_0) = E[XX_0] - E[X]E[X_0]$~~

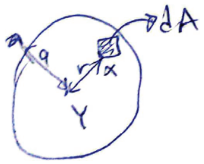
$$Cov(N(X), N(X_0)) = E[N(X)N(X_0)]$$
$$- E[N(X)]E[N(X_0)]$$

$$= \frac{2\pi \lambda e^{-\lambda \pi a^2}}{1-e^{-\lambda\pi a^2}} \int_0^a e^{-\left(\frac{1}{2\alpha^2}-\lambda\pi\right) r^2} \, r\,dr$$

$$= \frac{2\pi \lambda e^{-\lambda \pi a^2}}{1-e^{-\lambda\pi a^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\alpha^2}-2\pi\lambda}\left(1-e^{-\left(\frac{1}{2\alpha^2}-\lambda\pi\right)a^2}\right)$$

$$= \frac{2\pi\lambda}{\left(\frac{1}{\alpha^2}-2\lambda\pi\right)\left(1-e^{-\lambda\pi a^2}\right)}\left(e^{-\lambda\pi a^2}-e^{-\frac{a^2}{2\alpha^2}}\right)$$

۱۳) ابتدا دقت کنید که نقاط M از توزیع پواسن با پارامتر $\frac{\lambda}{3}$ می‌آیند.



$$E[m(Y)]$$

$$= \lim_{dA\to 0} \sum_{dA} P(Y\in B_x(r(x)))\, n(dA) \times E[N(Y)N(x)]$$

$$= \lim_{dA\to 0} \sum_{dA} \left(1-\frac{r}{a}\right)\frac{\lambda}{3}\, dA \times \frac{1}{1+r}$$

$$\Rightarrow \quad = \int_{B_a(Y)} \left(1-\frac{r}{a}\right)\frac{\lambda}{3}\cdot\frac{1}{1+r}\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a \left(1-\frac{r}{a}\right)\frac{\lambda}{3}\,\frac{1}{1+r}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{۲\pi\lambda}{۳a} \int_{1}^{a+1} -\frac{a+1}{r} - r + (a+۲)\, dr$$

$$a^{۲} + ۲a$$

$$= \frac{۲\pi\lambda}{۳a}\left(-(a+1)\ln(a+1) - \frac{\left((a+1)^{۲} - 1\right)}{۲} + (a+۲)a\right)$$

$$= \frac{۲\pi\lambda}{۳}\left(-\left(1+\frac{1}{a}\right)\ln(a+1) - \frac{(a+۲)}{۲}\right)$$