پاسخ نامه امتحان میانترم فرآیندهای تصادفی

۱- آ) نادرست.

$$N(t+1)-N(1) \sim \text{Poisson}(\lambda(t+1-1))$$

$$= \text{Poisson}(\lambda t) \neq \text{Poisson}(\lambda)$$

ب) نادرست. فرض کنید $X_1(t)$ یک فرآیند گاوسی با میانگین صفر و کرنل:

$$K(t,s) = e^{-\frac{1}{2}\cdot(t-s)^2}$$

است. $X_2(t)$ را $X_1(-t)$ تعریف کنید. هردو X_1 و X_2 فرآیندهای WSS هستند اما مجموع آن‌ها WSS نیست. زیرا:

$$E\left[(X_1(t)+X_2(t))(X_1(s)+X_2(s))\right]$$

$$= E\left[(X_1(t)+X_1(-t))(X_1(s)+X_1(-s))\right]$$

$$= 2e^{-\frac{(t-s)^2}{2}} + 2e^{-\frac{(t+s)^2}{2}}$$

تابعی از $t-s$ نیست.

پ) نادرست.

$$S_X(\omega) = \mathcal{F}(R_X(\theta)) = \mathcal{F}\left(e^{-|\theta|}\cos(2\theta)\right)$$

$$= \mathcal{F}\left(\frac{e^{-|\theta|}e^{2i\theta} + e^{-|\theta|}e^{-2i\theta}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(e^{-|\theta|}e^{i(2\theta)} + e^{-|\theta|}e^{-i(2\theta)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{1+(\omega-2)^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{1+(\omega+2)^2} = \frac{1}{1+(\omega-2)^2} + \frac{1}{1+(\omega+2)^2}$$

ت) درست.

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(S_x(\omega)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{3 \times 2}{3^2 + \omega^2}\right)$$
$$= \frac{5}{6} \cdot e^{-3|\tau|}$$

$$\rightarrow E\left[\left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt - \mu\right)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{T^2}\left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(s)\,dt\,ds\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{5}{6} e^{-3|t-s|}\,dt\,ds\right]$$

$$= \frac{2}{T^2} E\left[\frac{5}{6}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{t} e^{-3(t-s)}\,ds\,dt\right]$$

$$= \frac{5}{3T^2} E\left[\int_{-T/2}^{T/2}\int_{0}^{T/2+t} e^{-3s'}\,ds'\,dt\right]$$

$$= \frac{5}{3T^2} E\left[\int_{-T/2}^{T/2} \left(1 - \frac{e^{-3(T/2+t)}}{3}\right) dt\right]$$

$$\leq \frac{5}{3T^2} E\left[\int_{-T/2}^{T/2} 1\,dt\right] = \frac{5}{3T} \xrightarrow{T\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow E\left[\left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt - \mu\right)^2\right] \xrightarrow{T\to\infty} 0$$

$$x(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} 1[0 \leq \tau \leq T]\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{T}\big(u(\tau) - u(\tau - T)\big)}_{h(\tau)}\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$= h(t) * x(t)$$

$\hookrightarrow$ پاسخ ضربه

$$R_{YY}(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_{xx}(\tau)$$

$$h(t) * h(-t) = \frac{1}{T^2}\int_{\substack{0 \leq \tau \leq T \\ t \leq \tau \leq T+t}} 1\, d\tau = \frac{1}{T^2}(T - |t|)\, 1(|t| \leq T)$$

$$\rightarrow R_{YY}(\tau) = \sigma_x^2 \times \frac{1}{T^2}(T - |t|)\big(u(t+T) - u(t-T)\big)$$

$$\cancel{S_{YY}(\tau)} = \cancel{\frac{\sigma_x^2}{T^2}\big((T-t)u(t) + (t+T)u(-t)\big)}$$

$$= \cancel{\frac{\sigma_x^2}{T} - \frac{\sigma_x^2}{T^2}\big(t u(t) - t u(-t)\big)}$$

در محاسبات از این موضوع که انتگرال sin و cos روی هر بازه به طول 2π صفر است استفاده می‌شود.

۳- الف)

$$R_{xx}(s,t)=E[x(s)x(t)]$$

$$=E\left[\sum_{i,j} a_i a_j \sin\left(\frac{2\pi i t}{n}+\varphi_i\right)\sin\left(\frac{2\pi j s}{n}+\varphi_j\right)\right]$$

$$=E\left[\frac{1}{2}\sum a_i a_j \left(\cos\left(\frac{2\pi j s-2\pi i t}{n}+\varphi_j-\varphi_i\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\pm\cos\left(\frac{2\pi j s+2\pi i t}{n}+\varphi_j+\varphi_i\right)\right)\right]$$

$$=\sum\frac{1}{2}a_i a_j\left(E\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}(js-it)+\varphi_j-\varphi_i\right)\right]\right.$$

$$\left.\pm E\left[\cos\left(\frac{2\pi(js+it)}{n}+\varphi_j+\varphi_i\right)\right]\right)$$

برای $i\neq j$

$$E\Big[\cos\Big(\underbrace{\frac{2\pi(js-it)}{n}}_{\alpha}+\varphi_j-\varphi_i\Big)\Big]=E\big[E[\cos(\alpha+\varphi_j-\varphi_i)\mid\varphi_i]\big]$$

$$=E[0\mid\varphi_i]=0$$

به طور مشابه:

$$E\left[\cos\left(\frac{2\pi(js+it)}{n}+\varphi_j+\varphi_i\right)\right]=0$$

برای $i=j$:

$$E\left[\cos\left(\frac{2\pi i(s+t)}{n}+\varphi_i+\varphi_i\right)\right]=E\left[\cos\left(\frac{2\pi i(s+t)}{n}+2\varphi_i\right)\right]$$

$$=0$$

$$\Rightarrow R_{xx}(s,t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cos\frac{2\pi i(s-t)}{n}=R_{xx}(s-t)$$

ب) بله. زیرا R_{xx} تابعی از $s-t$ است. همچنین

$$E[x(t)]=\sum_{i=1}^{n}a_i\,E\left[\sin\left(\frac{2\pi i}{n}t+\varphi_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}a_i\times 0=0$$

(ب

$$R_{XX}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{2} \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\tau\right)$$

$$\rightarrow S_{XX}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{2} \mathcal{F}\left(\cos\left(\frac{2\pi i}{n}\tau\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{2} \pi\left(\delta\left(\omega - \frac{2\pi i}{n}\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi i}{n}\right)\right)$$

$$H(\omega) = \mathcal{F}\left(e^{-2t}u(t)\right) = \frac{1}{2+j\omega}$$

$$\rightarrow S_{XY}(\omega) = H(\omega)^* S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2-j\omega} \times \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi a_i^2}{2}\left(\delta\left(\omega - \frac{2\pi i}{n}\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi i}{n}\right)\right)$$

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega)$$

$$= \frac{1}{4+\omega^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi a_i^2}{2}\left(\delta\left(\omega - \frac{2\pi i}{n}\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi i}{n}\right)\right)$$

سوال ۶ :

$$B(t) = \gamma A(t)$$

$$P_T(B) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \gamma A(t)\,dt$$

$$\operatorname{Var}(P_T(B)) = \operatorname{var}\left(E\left[P_T(B|\gamma)\right]\right) + E\left[\operatorname{var}\left(P_T(B)|\gamma\right)\right]$$

$$= \operatorname{var}\left(\gamma E\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A(t)\,dt\right]\right)$$

$$+ E\left[\gamma^2 \operatorname{var}\left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A(t)\,dt\right)\right]$$

$$= \operatorname{Var}(\gamma \cdot \mu_A) + E[\gamma^2] \operatorname{Var}\left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A(t)\,dt\right)$$

$$= \mu_A \cdot \operatorname{var}(\gamma) + \underbrace{E[\gamma^2]}_{\geq 0} \underbrace{\operatorname{var}(P_T(A))}_{\geq 0}$$

$$\geq \mu_A \cdot \operatorname{var}(\gamma)$$

$$\rightarrow \lim_{T\to\infty} \operatorname{var}(P_T(B)) \geq \mu_A \operatorname{var}(\gamma) > 0$$

$$Z_T^B(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \gamma A(t)\gamma A(t+\tau)\,dt$$

$$\rightarrow \operatorname{var}\left(Z_T^B(\tau)\right) = \operatorname{var}\left(E\left[Z_T(\tau)|\gamma\right]\right) + E\left[\operatorname{var}\left(Z_T(\tau)|\gamma\right)\right]$$

$$= \operatorname{var}\left(\gamma^2 E\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A(t)A(t+\tau)\,dt\right]\right)$$

$$+ E\left[\gamma^4 \operatorname{var}\left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A(t)A(t+\tau)\,dt\right)\right]$$

$$= \operatorname{var}(\gamma^2)\left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R(\tau)\,d\tau\right)^2$$

$$+ E[\gamma^4] \operatorname{var}\left(Z_T^A(\tau)\right)$$

$$= (R(T))^2 \operatorname{var}(\gamma^2) + \underbrace{\operatorname{var}(Z_T^A(T))\, E[\gamma^2]}_{\geq 0}$$

$$\geq (R(T))^2 \operatorname{var}(\gamma^2)$$

$$\rightarrow \lim_{T \to \infty} \operatorname{var}(Z_T^B(T)) \geq R(T)^2 \operatorname{var}(\gamma^2) > 0$$

Scanned with CamScanner

$$P(X_t=1) = P(X(t)=1 \mid X(0)=-1)\,P(X(0)=-1) + P(X(t)=1 \mid X(0)=1)\,P(X(0)=1)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(P(\overbrace{\text{تعداد تغییر در بازه } (0,t) \text{ فرد است}}^{O_t} \mid X(0)=-1) + P(\overbrace{\text{تعداد تغییر در بازه } (0,t) \text{ زوج است.}}^{E_t} \mid X(0)=1)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(P(E_t \mid X(0)=-1) + P(O_t \mid X(0)=1)\big)$$

به طور مشابه $P(X_t=-1)$ هم همین به دست می‌آید.

$$\rightarrow P(X_t=1) = P(X_t=-1) = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow E[X_t] = 0 \quad (1)$$

برای $t<s$:

$$E[X_t X_s] = 1 \times P(X_t = X_s) + (-1) \times P(X_t = -X_s)$$

$$= 1 \times P(\underset{\text{تعداد تغییرات زوج}}{E_{t,s}}) - P(\underset{\text{تعداد تغییرات فرد}}{O_{t,s}})$$

با توجه به اینکه تغییرات یک فرآیند پواسن است در نتیجه تعداد تغییرات در یک بازه‌ی زمانی یک متغیر پواسن برحسب اندازه بازه و تنها وابسته به طول بازه می‌باشد.

$$\rightarrow E[X_t X_s] = P(E_{s-t}) - P(O_{s-t}) = R(s-t) \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} X_t$$ یک فرآیند WSS است.

۶-

$$f(t) = \frac{1}{8} e^{-t/8}$$

الف)

$$P(t \geq 8) = 1 - F(8) = e^{-\frac{8}{8}} = e^{-1}$$

ب) با توجه به نمایی بودن توزیع فاصله‌ی ماشین‌های متوالی و مستقل بودن فاصله‌ی زمان‌های رسیدن ماشین‌ها یک فرآیند پواسن است. در نتیجه توزیع (تعداد) ماشین‌ها در هر بازه‌ی زمانی پواسن است: $(\lambda = \frac{1}{8})$

$$P(N(0,16) < 2) = ?$$

$$N(0,16) \sim \text{Poisson}\left(\frac{1}{8} \times 16\right) = \text{Poisson}(2)$$

$$\rightarrow P(N(0,16) < 2) = e^{-2}\left(1 + \frac{2^1}{1!}\right) = 3e^{-2}$$

پ)

$J =$ فقط جعفر بمیرد

$A =$ فقط اکبر بمیرد

$N_1 =$ تعداد ماشین‌ها در ۸ ثانیه اول

$N_2 =$ تعداد ماشین‌ها در ۸ ثانیه دوم

$$N_1, N_2 \sim \text{Poisson}\left(\frac{8}{8}\right) = \text{Poisson}(1)$$

$$P(J) = P(N_1 = 1, N_2 = 0)$$

$$= P(N_1 = 1) P(N_2 = 0) = e^{-1} \times \frac{1}{1!} \times e^{-1} \times 1$$

$$= e^{-2}$$

$$P(A) = P(N_1 = 0, N_2 \geq 2)$$

$$= P(N_1 = 0) P(N_2 \geq 2) = e^{-1} \times 1 \times \left(1 - e^{-1} - e^{-1} \times \frac{1^1}{1!}\right)$$

$$= e^{-1}(1 - 2e^{-1})$$

$\rightarrow P($ فقط یک نفر ببرد $) = P(J) + P(A) = e^{-2} + e^{-1}(1-2e^{-2})$

$= e^{-1} - e^{-2}$

۴- الف) حرکت براونی یک فرآیند گوسی است :

$$P(X(t_1), X(t_2), X(t_3)) \sim N\left(0, \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$\rightarrow P(X(t_3) \mid X(t_1), X(t_2)) \sim N\left([t_1 \ t_2] \begin{bmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{bmatrix}, \ t_3 - [t_1 \ t_2] \begin{bmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{t_1 t_2 - t_1^2} \cdot \begin{bmatrix} t_2 & -t_1 \\ -t_1 & t_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{t_2 - t_1} \begin{bmatrix} t_2/t_1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [t_1 \ t_2] \begin{bmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{t_2 - t_1} [t_2 - t_2 \ \ t_2 - t_1] = [0 \ 1]$$

$$\rightarrow P(X(t_3) \mid X(t_1), X(t_2)) = N\left([0 \ 1] \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{bmatrix}, \ t_3 - [0, 1] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= N(X(t_2), t_3 - t_2)$$

مستقل از $X(t_1)$

$X(t_3) \perp\!\!\!\perp X(t_1) \mid X(t_2)$ ✓ $\Longleftarrow$

Scanned with CamScanner

ب) برای هر $t_1, \dots, t_n$ ،

$$(Y(t_1), \dots, Y(t_n)) = (X(s+t_1)-X(s), \dots, X(s+t_n)-X(s))$$

$$= [X(s), X(s+t_1), \dots, X(s+t_n)] \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

پس تبدیل خطی از یک متغیر گاوسی است. پس خودش یک متغیر گاوسی است.

$$E[Y(t)] = E[X(s+t)-X(s)] = E[X(s+t)] - E[X(s)]$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$t_1 < t_2$

$$E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[(X(t_1+s)-X(s))(X(t_2+s)-X(s))]$$

$$= E[X(t_1+s)X(t_2+s)] - E[X(t_1+s)X(s)]$$

$$- E[X(s)X(t_2+s)] + E[X(s)^2]$$

$$= (t_1+s) - s - s + s = t_1 = \min(t_1, t_2)$$

در نتیجه $Y(t)$ یک فرآیند گاوسی با میانگین صفر و کرنل $\min(s,t)$ است و یک حرکت براونی می باشد.

(ب

$$(X(t_1)-X(s_1),\dots,X(t_n)-X(s_n))$$

$$=(X(s_1),X(t_1),\dots,X(s_n),X(t_n))\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & -1 & & \\ \vdots & \vdots & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

پس تبدیل خطی یک متغیر گاوسی است. پس خودش نیز گاوسی است.

در نتیجه برای اثبات استقلال کافی است اثبات کنیم کوواریانس دو به دو مولفه‌ها صفر است: $i<j$

$$E[(X(t_i)-X(s_i))(X(t_j)-X(s_j))]$$

$$=E[X(t_i)X(t_j)]-E[X(t_i)X(s_j)]$$

$$-E[X(t_j)X(s_i)]+E[X(s_i)X(s_j)]$$

$$=t_i-t_i-s_i+s_i=0$$

(ج

$$P=E\left[\left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{T^2}E\left[\int_0^T\int_0^T x(t)x(s)\,dt\,ds\right]$$

$$=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T E[x(t)x(s)]\,dt\,ds$$

$$=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \min(s,t)\,ds\,dt$$

$$= \frac{2}{T^2} \int_{0 \leq s \leq t \leq T} s \, ds \, dt = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^t s \, ds \, dt$$

$$= \frac{2}{T^2} \cdot \int_0^T \frac{t^2}{2} dt = \frac{2}{T^2} \times \frac{T^3}{6} = T/3 \xrightarrow{T \to \infty} \infty$$

در نتیجه،

$$\lim_{T \to \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{T} \int x(t) \, dt - \mu\right)^2\right]$$

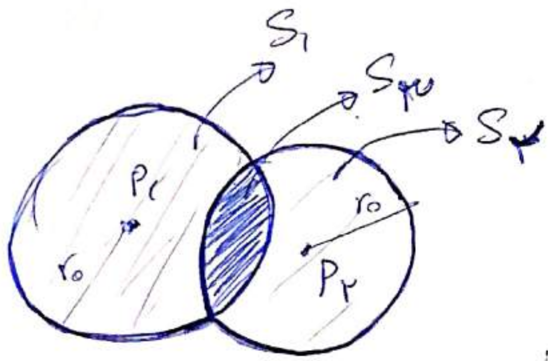
$$= \lim_{T \to \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{T} \int x(t) \, dt\right)^2\right] = \lim_{T \to \infty} T/3 \neq 0$$

پس حرکت براونی که نیز mean ergodic نیست.

۸- الف) $p(r)=\delta_{r_0}(r)$ به این معناست که شعاع دیسک‌ها مقدار ثابت r_0 است.

$\Rightarrow Z(x,y) =$ تعداد مراکزی که (x,y) درون دایره آن‌ها قرار می‌گیرد $= \left|\{c \mid |c-(x,y)| \le r_0$ و c یک مرکز است$\}\right|$

$=$ تعداد نقاط درون دیسک حول (x,y) به شعاع r_0 $= \text{Poisson}(\lambda \times \underbrace{\pi r_0^2}_{\text{مساحت دیسک}})$



برای نقاط دلخواه P_1 و P_2، اگر تعداد نقاط درون ناحیه S_i را N_i بنامیم، برای $z_1 \le z_2$،

$$P(Z(P_1)=z_1, Z(P_2)=z_2)$$

$$= P(N_1+N_3=z_1, N_2+N_3=z_2)$$

$$= \sum_{z_3=0}^{z_1} P(N_1=z_1-z_3, N_3=z_3, N_2=z_2-z_3)$$

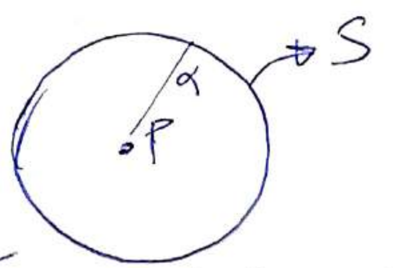
$$= \sum_{z_3=0}^{z_1} P(N_1=z_1-z_3)\, P(N_2=z_2-z_3)\, P(N_3=z_3)$$

که این عبارت کاملاً تابعی از مساحت s_1, s_2, s_3 است و با داشتن مساحت این سه قسمت به طور کلی بدست می آید.

اما مساحت s_1, s_2, s_3 هم از روی فاصله‌ی P_1 و P_2 به طور کلی بدست می آید، در نتیجه توزیع $Z(P_1), Z(P_2)$ از روی $\|P_1 - P_2\|$ به طور کلی محاسبه می شود.

ب)

$$E[Z(P)] = ?$$



برای هر نقطه داخل دیسک S احتمال این که دایره حول آن شامل P شود برابر با $1 - \frac{r}{a}$ است که r فاصله‌ی آن تا P است. در نتیجه برای هر نقطه p' اگر متغیر $X(p')$ را در صورت پوشانده شدن P توسط دایره‌ی حول p' 1 و در غیر این صورت 0 قرار دهیم:

$$Z(P) = \int_S X(p')\, N(ds)$$

$$\rightarrow E[Z(P)] = \int_S E[X(p')]\, N(ds)$$

$$= \int_S P(X(p') = 1)\, N(ds)$$

$$= \int_S \left(1 - \frac{r}{a}\right) N(ds)$$

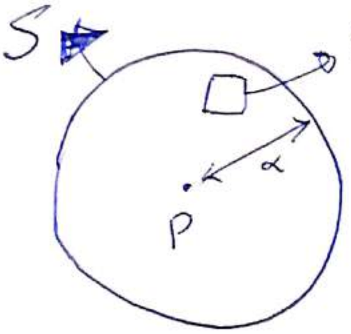
Scanned with CamScanner

فرض فرآیند=۱

$$\overset{}{=} \int_S \left(1-\frac{r}{\alpha}\right)\lambda\, dS = 2\pi\lambda \int_0^{\alpha} \left(1-\frac{r}{\alpha}\right) r\, dr$$

$$= 2\pi\lambda\left(\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^2}{3}\right) = \frac{\pi\lambda\alpha^2}{3}$$

پ)



S_i : $\begin{cases} N_i : \text{تعداد نقاط درون } S_i \\ r_i : \text{فاصله‌ی } S_i \text{ تا } p \end{cases}$

دیسک به شعاع α حول P را (دیسک S) را به نواحی کوچک $S_1, \dots, S_K$ تقسیم می‌کنیم.

$$P(Z(p)=0) = \sum_{n_1,\dots,n_K} P(Z(p)=0 \mid N_1=n_1,\dots,N_K=n_K) \times P(N_1=n_1,\dots,N_K=n_K)$$

$$= \sum_{n_1,\dots,n_K} \underbrace{\prod_{i=1}^{K}\left(\frac{r_i}{\alpha}\right)^{n_i}}_{\text{تمام نقاط داخل } S_i \text{ دیسکشان با } p \text{ اشتراک نداشته باشد.}} \prod_{i=1}^{K} e^{-\lambda|S_i|}\frac{(\lambda|S_i|)^{n_i}}{n_i!}$$

$$= \sum_{n_1,\dots,n_K} e^{-\lambda|S|}\prod_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{r_i\lambda|S_i|}{\alpha}\right)^{n_i}}{n_i!}$$

$$= e^{-\lambda|S|}\prod_{i=1}^{K}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{r_i\lambda|S_i|}{\alpha}\right)^{j}}{j!} = e^{-\lambda|S|}\prod_{i=1}^{K} e^{\frac{r_i\lambda|S_i|}{\alpha}}$$

$$= e^{-\lambda|S|} e^{\frac{\lambda}{\alpha}\sum_{i=1}^{k} r_i |S_i|}$$

حال اگر S_i ها را کوچک‌تر و کوچک‌تر کنیم:

$$e^{-\lambda|S|} e^{\frac{\lambda}{\alpha}\sum_{i=1}^{k} r_i |S_i|} \rightarrow e^{-\lambda|S|} e^{\frac{\lambda}{\alpha}\int_S r\, ds}$$

$$= e^{-\lambda|S|} e^{\frac{\lambda}{\alpha} 2\pi \int_0^{\alpha} r^2\, dr} = e^{-\lambda\pi\alpha^2 + \frac{2\lambda\pi}{\alpha}\times\frac{\alpha^3}{3}}$$

$$= e^{-\frac{\lambda\pi\alpha^2}{3}}$$

$$\rightarrow P(Z(P) > 0) = 1 - P(Z(P) = 0) = 1 - e^{-\frac{\lambda\pi\alpha^2}{3}}$$