فرایندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۱

مدرس: دکتر حمیدرضا ربیعی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

آزمون میان‌ترم

زمان: ۱۵۰ دقیقه ــ ۱۱۰ نمره (۱۰ نمره امتیازی) — تاریخ امتحان: ۹ام آذر ماه

پرسش یک

درست یا نادرست بودن هر کدام از گزاره های زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

- (۵ نمره) می‌توان با داشتن یک مسیر نمونه [1] از یک فرایند تصادفی SSS بودن یا نبودن آن را تشخیص داد.
- (۵ نمره) فرض کنید N(t) یک فرایند پوآسون با نرخ λ باشد. همچنین X_1 زمان اولین ورود مشروط بر $N(t_0) = 1$ باشد. در این صورت X_1 دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, t_0)$ است.

پرسش دو

(۱۰ نمره) فرض کنید یک سکه‌ی سالم [2] در اختیار داریم. آیا با این سکه می‌توانیم احتمال 0.625 را بسازیم؟ احتمال $\frac{1}{3}$ را چطور؟ (در صورت امکان چگونگی این کار را شرح دهید.)

پرسش سه

همان‌طور که می‌دانید گربه‌ها در دانشگاه شریف جایگاه خاصی دارند :). فرض کنید که با نرخ یک گربه در هفته به جمعیت گربه‌ها اضافه می‌شود. همچنین فرض کنید که این زاد و ولد گربه‌ها از یک فرایند پوآسون پیروی می‌کند.

۱. (۵ نمره) فرض کنید که nامین گربه در زمان t_0 به دنیا آمده باشد، توزیع توأم $T_1, ..., T_{n-1}$ ($n-1$ گربه‌ی نخست) را پیدا کنید.

۲. (۱۰ نمره) اگر هر گربه به صورت متوسط روزی ۱۰۰ گرم گوشت از دانشجویان بگیرد، امید ریاضی میزان گوشتی که دانشجویان تا زمان به دنیا آمدن ۱۰امین گربه به گربه‌ها می‌دهند چقدر است؟

۳. (۵ نمره) فرض کنید تا زمان t دقیقا n گربه به دنیا آمده باشند، در این صورت توزیع زمان تولد kامین گربه را پیدا کنید.

۴. (۵ نمره) با توجه به توضیحات بخش ۳ام سوال، امیدریاضی مقدار گوشتی که دانشجویان تا زمان t به گربه‌ها می‌دهند چقدر است؟

پرسش چهار

۱. (۱۰ نمره) دو فرایند $X_1(t)$ و $X_2(t)$ فرایندهایی Mean Ergodic هستند. میانگین آن‌ها به ترتیب η_1 و η_2 است. در صورتی که تعریف کنیم:

$$X(t) = X_1(t) + cX_2(t)$$

به صورتی که c یک متغیر برنولی مستقل با احتمال $\frac{1}{2}$ باشد. آیا فرایند $X(t)$ یک فرایند Mean Ergodic است؟ چرا؟

[1] Sample Path
[2] Fair Coin

۲. (۱۰ نمره) فرایند زیر را در نظر بگیرید:

$$X(t) = a \cdot \cos(\omega_1 t) + b \cdot \cos(\omega_2 t) + c \qquad (۱)$$

که در آن a و b به صورت توام گوسی با میانگین صفر و کواریانس ρ هستند. همچنین ω_1, ω_2 را ثابت در نظر بگیرید. در این صورت آیا $X(t)$ یک فرایند Mean Ergodic است؟ چرا؟

۳. (۱۰ نمره) در صورتی که A و ω و ثابت ϕ یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین $[-\pi, \pi]$ باشد. آیا فرایند زیر Mean Ergodic است؟ چرا؟

$$X(t) = Acos(\omega t + \phi)$$

پرسش پنج

(۱۰ نمره) $X(t)$ یک فرایند تصادفی با $\mathbb{E}[X(t)] = 5$ و

$$R_{xx}(\tau) = 25 + 4e^{-2|\tau|}$$

است. اگر $Y(t) = 2X(t) + 3\frac{d}{dt}X(t)$ باشد، مقادیر η_y ، $R_{yy}(\tau)$ و $S_{yy}(\omega)$ را پیدا کنید.

پرسش شش

فرآیند پواسن دو بعدی مشابه حالت یک بعدی، یک فرآیند نقطه ای روی $\mathbb{R}^2$ است که برای هر ناحیه در صفحه مانند A توزیع تعداد نقاط داخل این ناحیه از توزیع پواسن با پارامتر $\lambda S(A)$ پیروی می کند که $S(\cdot)$ تابع مساحت است. فرآیند نقطه ای N را اینگونه تعریف می کنیم که ابتدا یک فرآیند گاوسی مانند $Z(x, y)$ با کرنل rbf با پارامتر α و میانگین صفر تعریف می کنیم. سپس یک فرآیند پواسن دوبعدی با پارامتر λ در نظر گرفته و به ازای هر نقطه وقوع آن مانند $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ نقطه وقوع X را برای N با مقدار $Z(X)$ در نظر می گیریم.

۱. (۱۰ نمره) برای یک نقطه دلخواه درفرآیند N مانند X نزدیک ترین نقطه رخ داده را X_0 بنامید. همینطور دور ترین نقطه ای که در دایره به شعاع a حول X رخ می دهد (به شرط وجود آن) را X_a بنامید. توزیع محل X_0 و X_a را بدست آورید.

۲. (۵ نمره)

$$Cov(N(X), N(X_0)), Cov(N(X), N(X_a))$$

را محاسبه کنید.

۳. (امتیازی)(۱۰ نمره) فرآیند نقطه ای M را روی نقاط فرآیند N اینگونه تعریف کنید که ابتدا برای نقطه وقوع در N مانند $X \in \mathbb{R}^2$ آن نقطه به احتمال $\frac{1}{3}$ در M رخ می دهد و

$$M(X) = 0$$

سپس به ازای هر نقطه وقوع در M مانند X_0 در یک دیسک به شعاع r که $r \sim Uniform(0, b)$ به مقدار M در هر نقطه رخ داده داخل دیسک به مرکز X_0 مانند X مقدار $Z_2(X)Z_2(X_0)$ اضافه می شود. که Z_2 یک فرآیند گاوسی دو بعدی با میانگین صفر و کرنل

$$k(X, Y) = \frac{1}{||X - Y|| + 1}$$

است. مقدار $E[M(Y)]$ را برای نقطه دلخواه رخ داده Y محاسبه کنید.