بسمه تعالی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

فرآیندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۰۰ـ۰۱

دکتر ربیعی

آزمون میانترم | **زمان امتحان: ۲۱۰ دقیقه**

---

۱. درست یا نادرست بودن عبارات زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

آ) (۲ نمره) اگر $N(s)_{s\geq .}$ یک فرایند پواسون با پارامتر $\lambda > 0$ باشد آنگاه $N(t+1) - N(1)$ یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ است.

ب) (۳ نمره) مجموع هر دو فرآیند WSS یک فرآیند WSS است.

پ) (۳ نمره) $R(\theta) = e^{-|\theta|}cos(2\theta)$ یک تابع کورلیشن معتبر برای یک فرایند تصادفی معتبر با تابع چگالی طیفی توان[1] $S_X(\omega) = \frac{1}{1-(\omega-2)^2} + \frac{1}{1-(\omega+2)^2}$ است.

ت) (۵ نمره) فرآیند $X(t)$ با میانگین صفر و تابع چگالی طیفی توان $S_X(w) = \frac{5}{9+w^2}$ یک فرآیند mean ergodic است.

۲. (۷ نمره) فرض کنید:

$$Y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} X(\tau)d\tau$$

و برای فرآیند $X(t)$، داریم $R_{xx}(\tau) = \sigma_X^2\delta(\tau)$. تابع $R_{yy}(\tau)$ را بدست آورید.

۳. فرض کنید $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ متغیر های تصادفی مستقل هستند که از توزیع $uniform(-\pi, \pi)$ پیروی می کنند. فرآیند تصادفی $X(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin\left(\frac{2\pi i}{n}t + \varphi_i\right)$$

الف) (۵ نمره) R_{XX} را بدست آورید.

ب) (۳ نمره) آیا X یک فرآیند WSS است؟

پ) (۵ نمره) فرض کنید یک سیستم LTI داریم که پاسخ ضربه آن $h(t) = e^{-2t}u(t)$ است و $Y(t)$ حاصل اعمال این سیستم بر روی $X(t)$ است. توابع S_{XY} و S_{YY} را بدست آورید.

۴. (۱۰ نمره) فرض کنید $A(t)$ یک فرآیند WSS و mean ergodic و autocorrelation ergodic با میانگین ناصفر باشد. همچنین فرض کنید γ یک متغیر تصادفی غیرثابت مستقل از $X(t)$ با میانگین ناصفر باشد. اثبات کنید فرآیند $\gamma A(t)$ نه mean ergodic است و نه autocorrelation ergodic می باشد.

۵. (۷ نمره) فرض کنید $X(t)$ یک فرآیند تصادفی است که تنها مقادیر ۱− یا ۱ میگیرد و دو خاصیت زیر را دارد:

الف) مقدار $X(0)$ به احتمال یکسانی برابر با ۱− یا ۱ است.

ب) زمان های تغییر علامت $X(t)$ یک فرآیند پواسن است.

ثابت کنید $X(t)$ یک فرآیند WSS است.

---

[1] power spectral density funciton

۶. فرض کنید فاصله زمانی رسیدن ماشین های متوالی در اتوبان تهران-کرج متغیر های تصادفی مستقل با توزیع زیر است:

$$f(t) = \frac{۱}{۸} e^{-\frac{t}{۸}}$$

الف) (۲ نمره) جعفر می خواهد از خیابان عبور کند. عبور جعفر از خیابان ۸ ثانیه طول می کشد. او همان لحظه که یک ماشین رد می شود شروع به عبور از خیابان می کند. جعفر به چه احتمالی به سلامت از خیابان رد می شود؟

ب) (۵ نمره) اکبر همانند جعفر قصد عبور از خیابان را دارد. او ۱۶ ثانیه زمان برای عبور از خیابان نیاز دارد اما دو ماشین برای کشتن او نیاز است. اگر اکبر در زمان دلخواهی شروع به عبور از خیابان کند، چه قدر احتمال دارد که زنده بماند؟

پ) (۸ نمره) اگر اکبر و جعفر همزمان شروع به رد شدن از خیابان بکنند، احتمال اینکه دقیقا یکی از آن ها زنده بماند چقدر است؟

۷. حرکت براونی یک نوع فرآیند گاوسی با تابع میانگین صفر است که مجموعه اندیس آن اعداد نامنفی است و تابع کرنل آن به صورت $k(t,s) = \alpha \min(s,t)$ می باشد. فرض کنید $X(t)$ یک حرکت براونی باشد.

الف) (۸ نمره) برای هر $t_۱ < t_۲ < t_۳$ نشان دهید:

$$X(t_۳) \perp\!\!\!\perp X(t_۱) | X(t_۲)$$

به این معنا که متغیر های $X(t_۳)$ و $X(t_۱)$ به شرط $X(t_۲)$ از هم مستقل هستند.

ب) (۵ نمره) نشان دهید برای هر $۰ < s_۱ < t_۱ < s_۲ < t_۲ < ... < s_n < t_n$ متغیر های

$$X(t_۱) - X(s_۱), X(t_۲) - X(s_۲), ..., X(t_n) - X(s_n)$$

مستقل هستند.

پ) (۷ نمره) توان میانگین زمانی این فرآیند را برای هر T محاسبه کنید. آیا حرکت براونی یک فرآیند mean ergodic است؟

۸. فرآیند پواسن با پارامتر λ روی فضای دو بعدی اینگونه تعریف می شود که برای هر تعداد مستطیل مجزا مانند $R_۱, R_۲, ..., R_n$ تعداد نقاط درون این مستطیل ها از هم مستقل هستند و از توزیع پواسن با پارامترهای $\lambda S(R_۱), ..., \lambda S(R_n)$ پیروی می کنند.

حال فرض کنید فرآیند $Z(x,y)$ روی فضای دوبعدی اینگونه تعریف می شود که ابتدا تعدادی مرکز طبق فرآیند پواسن روی فضا ایجاد می شوند و به مرکز هر کدام از این نقاط دیسکی که شعاع آن از توزیع $p(r)$ پیروی می کند تشکیل می شود. سپس مقدار فرآیند برای هر کدام از نقاط فضا برابر با تعداد دیسک هایی که آن نقطه در آن ها قرار داشته است در نظر گرفته میشود.

الف) (۱۰ نمره) با فرض $p(r) = \delta_{r.}(r)$ توزیع $Z(x,y)$ را برای نقطه دلخواه (x,y) محاسبه کنید. همچنبن نشان دهید که فرآیند $Z(x,y)$ یک فرآیند SSS است. به این معنا که $P(Z(p_۱), Z(p_۲))$ تابعی از $||p_۱ - p_۲||_۲$ است.

ب) (۵ نمره) فرض کنید $p(r) = Uniform(۰, \alpha)$. مقدار $E[Z(x,y)]$ را برای نقطه دلخواه (x,y) بدست آورید.

پ) (۱۰ نمره) با فرض قسمت قبل مقدار $P(Z(x,y) > ۰)$ را برای نقطه دلخواه (x,y) بدست آورید.