بسمه تعالی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

# فرآیندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۰۰-۰۱
دکتر ربیعی

آزمون پایانترم — زمان امتحان: ۱۸۰ دقیقه

---

۱. آ) درست، به دلیل آن که Zt یک زنجیره‌ی identically distributed است، بنابراین SSS می‌باشد. دقت شود که این فرآیند نیست iid چون از طریق X به هم وابستگی دارند
ب) نادرست

*A necessary condition for $Y(t)$ to be a Gaussian process is that the random variable $Y(t)$ be Gaussian for every time instant $t$. In particular $Y(t)$ is Gaussian if it has a CDF of the form $F_{Y(t)}(y) = \Phi((y-\mu)/\sigma)$. For the given process, we can write the CDF of $Y(t)$ as*

$$F_{Y(t)}(y) = P[Y(t) \le y] = \sum_{n=0}^{\infty} P[Y(t) \le y | N(t) = n] P[N(t) = n]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{n+1}}\right) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

*Unfortunately, this sum cannot be reduced to a single $\Phi(\cdot)$ function. If this is not clear, you should take a derivative of the CDF and see that you do not obtain a Gaussian PDF. Thus $Y(t)$ is not a Gaussian random variable and thus the process is not Gaussian.*

پ) نادرست. برای مثال آماره‌ی کافی توزیع Multinomial یکی کمتر از ابعاد پارامترهای توزیع است.
ت) درست. چون هر راس به خودش نیز یال دارد، ب.م.م طول دورها ۱ است و aperiodic است.
ث) نادرست. هر بار اجرای viterbi یک ماتریس خروجی داره که محتمل‌ترین مسیر تا به حال را خروجی می‌دهد و دومین مسیر محتمل را از این ماتریس نمی‌توان خروجی گرفت.

a. To find $\mu_Y(t)$, we can write

$$\begin{aligned}\mu_Y &= \mu_X H(0)\\ &= 0 \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

b. To find $R_Y(\tau)$, we first find $S_Y(f)$.

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2.$$

From Fourier transform tables, we can see that

$$\begin{aligned}S_X(f) &= \mathcal{F}\{e^{-|\tau|}\}\\ &= \frac{2}{1+(2\pi f)^2}.\end{aligned}$$

Then, we can find $S_Y(f)$ as

$$\begin{aligned}S_Y(f) &= S_X(f)|H(f)|^2\\ &= \begin{cases} 2 & |f| < 2 \\ \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned}$$

We can now find $R_Y(\tau)$ by taking the inverse Fourier transform of $S_Y(f)$.

$$R_Y(\tau) = 8\text{sinc}(4\tau),$$

where

$$\text{sinc}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}.$$

.۲

c. We have

$$E[Y(t)^2] = R_Y(0) = 8.$$

**Solution:** *Let $N_1(t)$ be the number of taxicabs leaving a hotel with exactly one person until time $t$. Let $N_2(t)$ be the number of taxicabs leaving a hotel with exactly two persons until time $t$. Let $N_3(t)$ be the number of taxicabs leaving a hotel with exactly three persons until time $t$. Then, $N_1$, $N_2$ and $N_3$ are independent Poisson processes. Let $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ be their respective rates. We have that*

$$\lambda_1 = (10)(0.60) = 6, \;\; \lambda_2 = (10)(0.30) = 3, \;\; \lambda_3 = (10)(0.10) = 1.$$

*Let $Y$ be the number of people who leave the hotel in 72 hours. Then, $Y = N_1(72) + 2N_2(72) + 3N_3(72)$ be their respective rates. We have that*

$$E[Y] = E[N_1(72) + 2N_2(72) + 3N_3(72)] = (72)(6) + (2)(72)(3) + (3)(72)(1) = 1080$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(N_1(72) + 2N_2(72) + 3N_3(72))$$
$$= \mathrm{Var}(N_1(72)) + 4\mathrm{Var}(N_2(72)) + 9\mathrm{Var}(N_3(72)) = (72)(6) + (4)(72)(3) + (9)(72)(1) = 1944$$ .۳

$$P(Y \geqslant \text{۹۵۰}) \simeq P\left(N(\text{۰},\text{۱}) \geqslant \frac{\text{۹۵۰} - \text{۱۰۸۰}}{\sqrt{\text{۱۹۴۴}}}\right) = P(N(\text{۰},\text{۱}) \geqslant -\text{۲,۹۴})$$
$$= P(N(\text{۰},\text{۱}) \leqslant \text{۲,۹۴}) \simeq \text{۰,۹۹۸}$$

---

b) Similarly as before, for $0 \leq s \leq t$, compute:

$$F_{S_2|N_t=2}(s) = \mathbb{P}(N_s \geq 2 \mid N_t = 2) = \\ = \frac{\mathbb{P}(N_s = 2, N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 2)} = \\ = \frac{s^2}{t^2},$$

so that $f_{S_2|N_t=2}(s) = \dfrac{2s}{t^2}$ and $\mathbb{E}(S_2 \mid N_t = 2) = \dfrac{2t}{3}$.

Next,

$$F_{S_1|N_t=2}(s) = \mathbb{P}(N_s \geq 1 \mid N_t = 2) = \\ = \frac{\mathbb{P}(N_s = 1, N_t - N_s = 1) + \mathbb{P}(N_s = 2, N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_t = 2)} = \\ = \frac{2st - s^2}{t^2},$$

so that $f_{S_1|N_t=2}(s) = \dfrac{2(t-s)}{t^2}$ and $\mathbb{E}(S_1 \mid N_t = 2) = \dfrac{t}{3}$.

First note that

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{(1+x_i)^{\theta+1}} \\
&= \frac{\theta^n}{\left[\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\right]^{\theta+1}} \\
&= \frac{\theta^n}{u^{\theta+1}}
\end{aligned}
$$

Here we have

$$
\begin{aligned}
U &= \prod_{i=1}^{n}(1+X_i) \\
g(u, \theta) &= \frac{\theta^n}{u^{\theta+1}} \\
h(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 1
\end{aligned}
$$

Thus, by the Factorization Theorem,

$$U = \prod_{i=1}^{n}(1+X_i)$$

is a sufficient statistic for $\theta$.

۴.

1. (a) Using change of variable theorem:

$$
\begin{aligned}
& g(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{x^2} \\
& y=\frac{1}{x} \Rightarrow x_1=\frac{1}{y} \\
& \Rightarrow f(y)=\frac{f_x\left(\frac{1}{y}\right)}{\left|g'\left(\frac{1}{y}\right)\right|}=y^2\frac{\beta^\alpha y^{1-\alpha} e^{-\frac{B}{y}}}{\Gamma(a)}=\frac{\beta^\alpha y^{-1-\alpha} e^{-\frac{\beta}{y}}}{\Gamma(a)}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
& P\left(\sigma^2 \mid x, \alpha, \beta, \mu\right)=\frac{P\left(x \mid \mu, \sigma^2\right) P\left(\sigma^2 \mid \alpha, \beta\right)}{\int P\left(x \mid \mu, \sigma^2\right) P\left(\sigma^2 \mid \alpha, \beta\right) d\sigma^2} \\
& P\left(x \mid \mu, \sigma^2\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2} \\
& P\left(\sigma^2 \mid \alpha, \beta\right)=\frac{\beta^\alpha \sigma^{2(-1-\alpha)} e^{-\frac{\beta}{\sigma^2}}}{\Gamma(\alpha)} \\
& \Rightarrow P\left(x \mid \mu, \sigma^2\right) P\left(\sigma^2 \mid \alpha, \beta\right)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(a)} \sigma^{2(-1-\alpha-n/2)} e^{-\frac{1/2\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2+\beta}{\sigma^2}}
\end{aligned}
$$

For finding normalization factor we consider $IG\left(\alpha+\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2+\beta\right)$ Since it is a distribution:

$$
\begin{aligned}
& \int \rho\left(x \mid \mu, \sigma^2\right) P\left(\sigma^2 \mid \alpha, \beta\right) d\sigma^2= \\
& =\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n/2)}{\left(\frac{1}{2}\sum(x_i-\mu)^2+\beta\right)^{\alpha+n/2}}
\end{aligned}
$$

So after normalization:

$$
P\left(\sigma^2 \mid x, \alpha, \beta, \mu\right) \sim IG\left(\alpha+\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2+\beta\right)
$$

.۵

$$f(x|\theta) = \prod f(x_i|\theta) = \prod \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x_i) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n I_{(0,\theta)}(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\Rightarrow f(x|\theta) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\theta}\right)^n & \text{if } \max(x_i) \leq \theta \quad (\text{or } X_{(n)} \leq \theta) \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

پس $X_{(n)}$ یک SS است. حال نشان می‌دهیم MSS نیز هست. یعنی نشان می‌دهیم که $\frac{f(\bar{x}|\theta)}{f(\bar{y}|\theta)}$ یک مقدار مستقل از $\theta$ است، اگر و فقط اگر $T(\bar{x}) = T(\bar{y})$ باشد،

$$\frac{f(\bar{x}|\theta)}{f(\bar{y}|\theta)} = \frac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^n I_{(0,\theta)}(x_1, \ldots, x_n)}{\left(\frac{1}{\theta}\right)^n I_{(0,\theta)}(y_1, \ldots, y_n)} = \frac{I_{(0,\theta)}(x_1, \ldots, x_n)}{I_{(0,\theta)}(y_1, \ldots, y_n)} = \begin{cases} 1 & \text{if } \begin{matrix} \max(x_i) \leq \theta \\ \max(y_i) \leq \theta \end{matrix} \\ 0 \text{ or } \infty & \text{o.w.} \end{cases}$$

این عبارت زمانی مستقل از $\theta$ می‌شود که دقیقاً داشته باشیم $X_{(n)} = Y_{(n)}$. در غیر این صورت می‌توان یکی از مقادیر صورت و مخرج را صفر و دیگری را یک کرد. پس $T(\bar{x}) = X_{(n)}$ یک MSS است.

چون CSS موجود است، طبق قضیه گفته شده که در صورت وجود MSS، MSS نیز CSS می‌شود، داریم که $T(\bar{x})$ یک CSS است.

(اثبات از طریق تعریف مستقیم CSS بودن نیز مورد قبول است.

.۶

**PROBLEM 5.** *(Problem 2.2.25).*

*Solution.* Let $X_1, \ldots, X_m$ and $Y_1, \ldots, Y_n$ be i.i.d. as $\text{Unif}(0, \theta)$ and $\text{Unif}(0, \theta')$, respectively. We know that $(X_{(m)}, Y_{(n)})$ is a complete sufficient statistic of the data. (Lehmann and Casella, Example 6.23.) Since

$$\frac{\theta}{2} = \mathsf{E}_\theta \left[\overline{X}\right] = \mathsf{E}_\theta \left[\frac{X_{(1)} + \ldots + X_{(m)}}{m}\right],$$

$\frac{2}{m} \sum_{i=1}^m X_{(i)}$ is an unbiased estimator of $\theta$. Using Rao-Blackwell Theorem,

$$\hat{\theta} = \mathsf{E}_\theta \left[\frac{2}{m}(X_{(1)} + \ldots + X_{(m)}) \middle| X_{(m)}\right] = \frac{2}{m}\left((m-1)\frac{X_{(m)}}{2} + X_{(m)}\right) = \frac{m+1}{m} X_{(m)}$$

is the UMVUE of $\theta$. Now we will derive the UMVUE of $1/\theta'$. Since $Y_{(n)} = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, the cdf of $Y_{(n)}$ is

$$\mathsf{P}(Y_{(n)} \leq t) = \mathsf{P}(Y_1 \leq t) \cdots \mathsf{P}(Y_n \leq t) = \frac{t^n}{\theta'}$$

for $t \in [0, \theta']$. Hence, $Y_{(n)}$ has pdf $f_{Y_{(n)}}(t) = \frac{nt^{n-1}}{(\theta')^n} \mathbb{1}_{t \in [0,\theta']}$. Therefore,

$$\mathsf{E}_{\theta'}\left[\frac{1}{Y_{(n)}}\right] = \int_0^{\theta'} \frac{1}{y} \frac{ny^{n-1}}{(\theta')^n} dy = \frac{n}{n-1} \frac{1}{\theta'}.$$

Hence, the UMVUE of $1/\theta'$ is

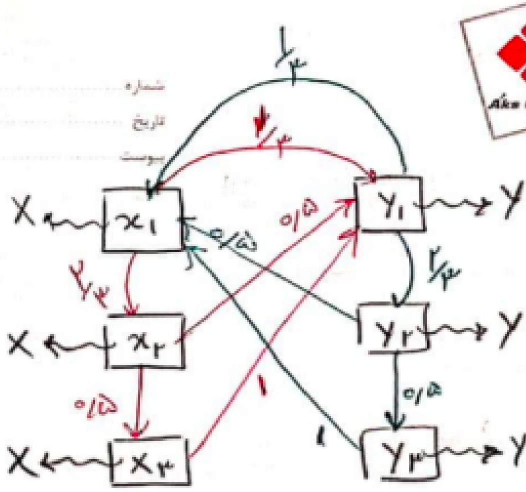
$$\widehat{\frac{1}{\theta'}} = \frac{n-1}{n} \frac{1}{Y_{(n)}}.$$

Therefore, since $X^m$ and $Y^n$ are independent, the UMVUE of $\theta/\theta'$ is

$$\widehat{\frac{\theta}{\theta'}} = \hat{\theta} \widehat{\frac{1}{\theta'}} = \frac{(m+1)(n-1)}{mn} \frac{X_{(m)}}{Y_{(n)}}.$$

۷.






۶ تا state داریم

state های $x_i$ فقط X را به عنوان emission دارند و $y_i$ ها فقط Y

* $x_1$ نشان دهنده جایگاه اول است که x می‌آید و به همین ترتیب ...

$y_3$ فقط به $x_1$ می‌تواند برود زیرا بعد از ۳ بار Y آمده باید بعدش حتماً X بیاید (و برعکس هم همینطور است)

$x_2$ یعنی دوبار ۲ بار X آمده و احتمال ۰/۵ می‌توان X بیاید (۳ بار X بیاید) یا با احتمال ۰/۵ Y بیاید (به $y_1$)

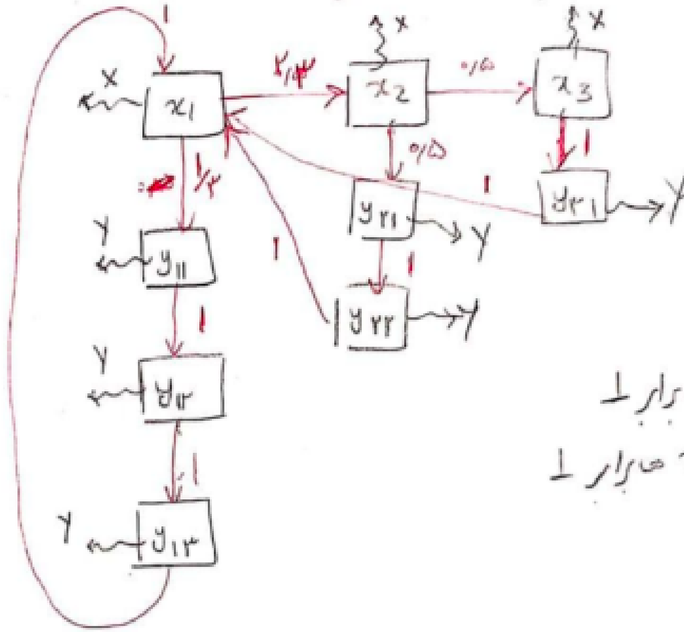
XXY
XXXY
XY
→ بعد از اولین X با احتمال $\frac{2}{3}$ X می‌آید و با احتمال $\frac{1}{3}$ Y

$\Leftarrow x_1$ با احتمال $\frac{1}{3}$ به $y_1$ و $\frac{2}{3}$ به $x_2$ می‌رود

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | X | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | ۰ | ۲/۳ | ۰ | ۱/۳ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| $x_2$ | ۰ | ۰ | ۱/۲ | ۱/۲ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| $x_3$ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| $y_1$ | ۱/۳ | ۰ | ۰ | ۰ | ۲/۳ | ۰ | ۰ | ۱ |
| $y_2$ | ۱/۲ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱/۲ | ۰ | ۱ |
| $y_3$ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |

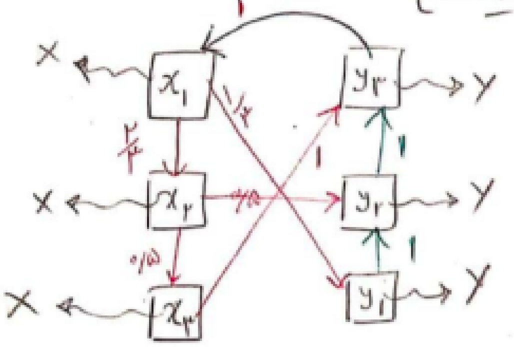
transition — emission

ب) ماشین مشابه قبل است با این تفاوت که مینیمال نیست




احتمال Y برای $y_{ij}$ ها برابر 1
و احتمال X برای $x_i$ ها برابر 1

ب) حالت مینیمال (خواسته مسئله نیست)




| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | X | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | ۰ | ۲/۳ | ۰ | ۱/۳ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| $x_2$ | ۰ | ۰ | ۱/۲ | ۰ | ۱/۲ | ۰ | ۱ | ۰ |
| $x_3$ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| $y_1$ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| $y_2$ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| $y_3$ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |

اگر $I_A$ را متغیر نشانگر بهبود یافتن یکی از افراد گروه A و $I_B$ را متغیر نشانگر بهبود یکی از افراد گروه B در نظر بگیریم، داریم:

$$I_A = \begin{cases} 1 & p_A \\ 0 & 1 - p_A \end{cases} \qquad I_B = \begin{cases} 1 & p_B \\ 0 & 1 - p_B \end{cases}$$

باید توجه کنیم که $p_A$ و $p_B$ همان $\mu_A$ و $\mu_B$ یعنی نسبت‌های واقعی تعریف شده در مسئله هستند. و با توجه به نمونه‌گیری داریم:

$$\hat{p_A} = \hat{\mu_A} = 25/30$$
$$\hat{p_B} = \hat{\mu_B} = 15/30$$

طبق قضیه حد مرکزی داریم:

$$\text{CLT:} \sum_{i=1}^{30} I_{A,i} \sim N(30 p_A, 30 \sigma_A^2)$$
$$\hat{\mu_A} = \frac{\sum_{i=1}^{30} I_{A,i}}{30} \sim N(p_A, \frac{\sigma_A^2}{30})$$

که:

$$\sigma_A^2 = p_A(1 - p_A)$$

به طور مشابه این روابط برای گروه B هم صادق است. حال حدس میزنیم که $\hat{\mu_A} - \hat{\mu_B}$ نرمال است یعنی باید بررسی کنیم که تفاضل دو متغیر نرمال، خود نرمال هست یا خیر.

۷

.۸

اثبات:

اگر X و Y دومتغیر نرمال باشند و $Z = X - Y$ باشد داریم:

$$f_X(x) = \mathcal{N}\left(x; \mu_X, \sigma_X^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-(x-\mu_X)^2/\left(2\sigma_X^2\right)} \quad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x) f_X(x) dx$$
$$f_Y(y) = \mathcal{N}\left(y; \mu_Y, \sigma_Y^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-(y-\mu_Y)^2/\left(2\sigma_Y^2\right)}$$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left[-\frac{(x-z-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}\sigma_X\sigma_Y} \exp\left[-\frac{\sigma_X^2\left(x-z-\mu_Y\right)^2 + \sigma_Y^2\left(x-\mu_X\right)^2}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}\sigma_X\sigma_Y} \exp\left[-\frac{\sigma_X^2\left(z^2+x^2+\mu_Y^2-2xz+2z\mu_Y-2x\mu_Y\right) + \sigma_Y^2\left(x^2+\mu_X^2-2x\mu_X\right)}{2\sigma_Y^2\sigma_X^2}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}\sigma_X\sigma_Y} \exp\left[-\frac{x^2\left(\sigma_X^2+\sigma_Y^2\right) - 2x\left(\sigma_X^2\left(z+\mu_Y\right)+\sigma_Y^2\mu_X\right) + \sigma_X^2\left(z^2+\mu_Y^2+2z\mu_Y\right)+\sigma_Y^2\mu_X^2}{2\sigma_Y^2\sigma_X^2}\right] dx
\end{aligned}$$

اگر $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$ قرار دهیم :

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_Y}{\sigma_Z}}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2x\frac{\sigma_X^2(z+\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sigma_Z^2} + \frac{\sigma_X^2\left(z^2+\mu_Y^2+2\mu_Y z\right)+\sigma_Y^2\mu_X^2}{\sigma_Z^2}]}{2\left(\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_Z}\right)^2}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_Z}} \exp\left[-\frac{\left(x-\frac{\sigma_X^2(z+\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sigma_Z^2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_X^2(z+\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sigma_Z^2}\right)^2 + \frac{\sigma_X^2(z+\mu_Y)^2+\sigma_Y^2\mu_X^2}{\sigma_Z^2}}{2\left(\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_Z}\right)^2}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left[-\frac{\sigma_Z^2\left(\sigma_X^2(z+\mu_Y)^2+\sigma_Y^2\mu_X^2\right) - \left(\sigma_X^2(z+\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X\right)^2}{2\sigma_Z^2\left(\sigma_X\sigma_Y\right)^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_Z}} \exp\left[-\frac{\left(x-\frac{\sigma_X^2(z+\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sigma_Z^2}\right)^2}{2\left(\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_Z}\right)^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left[-\frac{(z-(\mu_X-\mu_Y))^2}{2\sigma_Z^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_Z}} \exp\left[-\frac{\left(x-\frac{\sigma_X^2(z+\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sigma_Z^2}\right)^2}{2\left(\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_Z}\right)^2}\right] dx
\end{aligned}$$

تابع درون انتگرال یک تابع چگالی احتمال توزیع نرمال است پس انتگرال آن برابر یک است. در نتیجه:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left[-\frac{(z-(\mu_X-\mu_Y))^2}{2\sigma_Z^2}\right]$$

که نشان میدهد Z نرمال است با میانگینی برابر تفاضل میانگین‌های Y و X.

حال اگر به جای X قرار دهیم $\hat{\mu_A}$ و بجای Y قرار دهیم $\hat{\mu_B}$ داریم:

$$\hat{\mu_A} - \hat{\mu_B} \sim N\left(p_A - p_B, \sigma_{\hat{\mu_A}}^2 + \sigma_{\hat{\mu_B}}^2\right) \tag{11}$$

### ب

حال با توجه به این که $\hat{\mu_A} - \hat{\mu_B}$ نرمال است و مقدار واقعی واریانس آن ( $\sigma^{۲}_{\hat{\mu_B}}$) را نداریم و تنها با تخمین $p_A$ و $p_B$ از روی نمونه‌های گرفته شده میتوانیم مقدار واریانس را تخمین بزنیم میتوانیم ادعا کنیم که:

$$\frac{(\hat{\mu_A}-\hat{\mu_B})-(p_A-p_B)}{\sqrt{\sigma^{۲}_{\hat{\mu_B}}+\sigma^{۲}_{\hat{\mu_A}}}} = \frac{(\hat{\mu_A}-\hat{\mu_B})-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\hat{p_A}(۱-\hat{p_A})}{۳۰}+\frac{\hat{p_B}(۱-\hat{p_B})}{۳۰}}} \sim Student\ Distribution$$

با مراجعه به چارت توزیع Student مقدار برای بازه‌ی ۹۵ درصد را برابر ۲.۰۴۵ بدست میآوریم:

$$-۲/۰۴۵ < \frac{\frac{۲۵}{۳۰}-\frac{۱۵}{۳۰}-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\frac{۲۵}{۳۰}(\frac{۵}{۳۰})+\frac{۱۵}{۳۰}(\frac{۱۵}{۳۰})}{۳۰}}} < ۲/۰۴۵ \quad -۲/۰۴۵ < \frac{(\hat{\mu_A}-\hat{\mu_B})-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\hat{p_A}(۱-\hat{p_A})}{۳۰}+\frac{\hat{p_B}(۱-\hat{p_B})}{۳۰}}} < ۲/۰۴۵$$

$$۰/۳۰۶ < \mu_A - \mu_B < ۰/۵۹۸$$

پس بازه‌ی مورد نظر برابر [۰.۰،۳۰۶.۵۹۸ است.]

ج) مقدار z با داشتن sigma = 0.3 ، ۱۰/۳۰ = X_bar برابر با

(⅓ - (u_a - u_b)) / 2

است

و با مراجعه به جدول z، برای بازه‌ی 95% به عدد ۱.۶۴ می‌رسیم.

-1.64 < (⅓ - (u_a - u_b))/ 0.3 < 1.64
-0.49 - 0.33 < - (u_a - u_b) < 0.49 - 0.33
-0.87 < - (u_a - u_b) < 0.16
-0.16 < u_a - u_b < 0.87

u_ a = u_b is therefore not rejected