فرایندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۱

مدرس: حمیدرضا ربیعی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

آزمون پایان‌ترم

زمان: ۲۱۰ دقیقه ـ ۱۲۰ نمره (۲۰ نمره امتیازی)　　　　تاریخ امتحان: ۲۶ دی

پرسش یک (۱۵ نمره)

فرض کنید یک سکه‌ی سالم داده‌ی $x[n] = A + w[n]$ برای n های بین ۰ تا $N-1$ مشاهده شده است. می‌دانیم پارامتر مجهول A دارای prior با توزیع زیر می‌باشد: ($\lambda > 0$ و $w[n]$ نویز سفید با واریانس معلوم σ^2 و مستقل از A می‌باشد.)

$$p(A) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda A) & A > 0 \\ 0 & A < 0 \end{cases}$$

تخمین‌گر MAP را برای A بیابید.

پرسش دو (۲۰ نمره)

در فروشگاهی یک ماشین شانس با ۳ دسته‌ی A, B, C وجود دارد. زمانی که هر دسته کشیده شود، کاراکتری از مجموعه‌ی $\{A, B, C\}$ به حافظه‌ی ماشین ارسال می‌شود. به دلیل نویزی که در سیستم کار گذاشته شده، هر دسته‌ای با احتمال 0.8 کاراکتر مربوط به خود و با احتمال0.1 هر یک از دو کاراکتر دیگر را ارسال می‌کند. در صورتی که رشته‌ی ثبت شده در حافظه‌ی ماشین منتهی به زیررشته‌ی طلایی $ACAC$ باشد، به کسی که دسته آخر را کشیده باشد با احتمال 0.5 و در تمام حالات دیگر با احتمال 0.0001 جایزه می‌دهد.

۱. در صورتی که تمایل مردم به کشیدن دسته‌ی میانی (B) دو برابر دو دسته‌ی دیگر باشد (با وزن ۲ دسته‌ی میانی، با وزن ۱ دسته اول و با وزن ۱ دسته‌ی سوم انتخاب شود)، تعداد امتحان‌های مورد انتظار بین دو جایزه دادن متوالی دستگاه چقدر خواهد بود؟

۲. در صورتی که امتحان ماشین هزینه‌ای برابر ۱۰۰۰ تومان داشته باشد و جایزه‌ی برنده یک میلیون تومان باشد، صاحب ماشین شانس در ۱۰۰۰ بار استفاده از ماشین چقدر سود می‌کند؟

۳. یک روز صاحب ماشین تصمیم می‌گیرد با دستکاری در آن مانع از جایزه دادنش در حالت‌های غیر از منتهی به زیررشته‌ی طلایی شود. با وجود موفقیت وی در هدفش، به دلیل این دستکاری دسته‌ی A آسیب می‌بیند. این دسته در حالت جدید در صورتی که بعد از دسته‌ی B کشیده شود با احتمال 0.5 کاراکتر B، با احتمال 0.4 کاراکتر C و 0.1 کاراکتر مربوط به خود را تولید می‌کند. در باقی حالات این دسته مثل گذشته کار می‌کند. در شروع همان روز اتفاق عجیبی می‌افتد و از ۳ امتحان پشت سر هم صبح دو نفر جایزه دریافت می‌کنند. در صورتی که آخرین دسته‌ی کشیده شده قبل از این ۳ امتحان A بوده باشد، محتمل‌ترین دسته‌هایی که ۳ نفر بعدی کشیده‌اند چه بوده است؟

پرسش سه (۱۵ نمره)

میانگین طول عمر لامپ‌های یک کارخانه ۱۲۰۰ ساعت است. یکی از افراد خط تولید با ارائه یک روش جدید در تولید لامپ‌ها سعی در افزایش طول عمر لامپ‌ها داشته است. پس از اجرای راهکار این شخص و نمونه‌گیری از ۱۰۰ لامپ، شاهد میانگین طول عمر ۱۲۵۶ ساعت و واریانس نمونه ۲۰۰ ساعت در لامپ‌های جدید بوده‌ایم.

صاحب کارخانه ادعا کرده است که این افزایش طول عمر در لامپ‌ها تصادفی بوده است و اثربخشی روش جدید را کاملا رد می‌کند. آیا با سطح اطمینان ۱ درصد ادعای او را قبول می‌کنید؟ با سطح اطمینان ۵ درصد چطور؟

پرسش چهار (۲۰ نمره)

پس از افزایش مهاجرت‌ها به کشور دوست و همسایه قطر، مسئولین این کشور تصمیم به مدل‌سازی ریاضی برای کنترل و تحلیل جمعیت این کشور گرفته‌اند. مدلی که برای جمعیت این کشور درنظر گرفته‌شده است یک فرآیند نقطه‌ای است که در آن افراد طبق یک فرآیند پواسن با نرخ ثابت λ به این کشور مهاجرت کرده و هر فردی که در زمان t_i به این کشور مهاجرت می‌کند، طبق یک فرآیند پواسن با نرخ $\mu(t - t_i)$ فرزندآوری می‌کند.

۱. تابع نرخ این فرآیند $\lambda(t|\mathcal{H}(t))$ را محاسبه کنید.

۲. متغیر زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho = \int_0^\infty \mu(s)ds$$

این متغیر چه معنایی دارد؟ با فرض این که $1 > \rho > 0$ احتمال این که یک فرد غیربومی مهاجر باشد را بدست آورید (بومی به افرادی گفته می‌شود که از نسل یک مهاجر نیستند).

۳. فرض کنید $\mu(s) = \alpha e^{-\beta s}$ و

$$A_i = \sum_{j=1}^{i-1} e^{-\beta(t_i - t_j)} \qquad 1 \leq i \leq k$$

که $t_1, ..., t_k$ زمان‌های رخداد فرآیند هستند. مقدار likelihood را برای بازه $[0, t_k]$ بر حسب A_i ها بدست آورید.

۴. با فرض

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{A_i} > \alpha t_k$$

و دانستن باقی متغیرها، نشان دهید تخمینگر MLE یکتا برای λ وجود دارد.

پرسش پنج (۳۰ نمره)

داده‌های $X_1, X_2, ..., X_n$ را نمونه‌هایی iid از توزیع $Gamma(4, \theta)$ در نظر بگیرید. به صورتی که داریم: $\theta \in (0, \infty)$

۱. Likelihood (θ) را بدست آورید.

۲. با استفاده از قضیه‌ی Neyman–Fisher آماره‌ی کافی S را برای θ بدست آورید.

۳. یک آماره‌ی کافی کامل را برای θ بدست آورید.

۴. مقدار Fisher's Information را برای θ بدست آورید.

۵. کران پایین Cramer-Rao را برای تخمین‌گرهای unbiased برای θ مشخص کنید.

۶. یک UMVUE را برای θ مشخص کنید.

پرسش شش (امتیازی) (۲۰ نمره)

فرض کنید $X(t) = \{X_n : n \geq 0\}$ یک زنجیره مارکوف باشد با مجموعه حالات متنهاهی S و احتمال‌های گذر p_{ij} به طوری که برای هر $i, j \in S$ ، $p_{ij} > 0$.

۱. زنجیره مارکوف Y را به صورت مستقل با همان حالات و احتمال‌های گذر X در نظر بگیرید که توزیع نقطه شروع آن توزیع ایستای X می‌باشد. اولین زمانی که X و Y به حالت یکسانی می‌رسند را T بنامید. نشان دهید:

$$|p_{ij}^{(n)} - p_{kj}^{(n)}| \leq P(T \geq n | X_0 = i, Y_0 = k)$$

۲. نشان دهید $\lambda \in (0, 1)$ وجود دارد که:

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| < \lambda^n$$