



## فرآیندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۰۰-۰۱  
دکتر ربیعی

زمان امتحان: ۱۸۰ دقیقه

آزمون پایانترم

- تعداد سوالات امتحان ۸ عدد می‌باشد.
- مجموع نمرات امتحان ۱۱۰ نمره با احتساب ۱۰ نمره امتیازی است.
- تمام پاسخ‌ها را به صورت تمیز و خوانا در برگه پاسخنامه خود بنویسید.
- در این امتحان استفاده از جزوه یا اینترنت مجاز نیست.
- استفاده از منابع زیر برای مطلوبات مسائل امتحان مجاز است:

۱. جدول تبدیل‌های فوریه: <https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/baug/ibk/structural-mechanics-dam/education/identmeth/fourier.pdf>

۲. محاسبه‌گر تابع CDF توزیع نرمال: <https://stattrek.com/online-calculator/normal.aspx>

۳. جدول مقادیر مرجع برای Z-test: <http://www.z-table.com>

۴. جدول مقادیر مرجع برای t-test: <https://www.tdistributiontable.com>

۱. درست یا نادرست بودن عبارات زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.
  - (آ) (۲ نمره) فرآیند  $Z(t) = Y(t) + X$  را در نظر بگیرید که  $X$  متغیر تصادفی نرمال می‌باشد و  $Y(t)$  یک زنجیره iid می‌باشد آنگاه  $Z(t)$  یک فرآیند SSS است.
  - (ب) (۵ نمره)  $P(t)$  یک فرآیند پواسون با نرخ  $\gamma$  است. اگر  $G_1, G_2, \dots$  متغیرهای تصادفی iid از توزیع گاوسی با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشند. آنگاه  $\sum_{i=0}^{P(t)} G_i$  یک فرآیند گاوسی است.
  - (پ) (۳ نمره) اگر بعد یک آمار کافی برابر با بعد پارامترهای توزیع مولد باشد، آن آمار کافی یک آمار کافی کمینه است.
  - (پ) (۲ نمره) ماتریس ۲ در ۲ انتقال مربوط به زنجیره‌ی مارکوفی با مقادیر 0.5 aperiodic است.
  - (ت) (۲ نمره) در یک بار اجرای الگوریتم Viterbi می‌توانیم علاوه بر محتمل‌ترین مسیر، دومین مسیر محتمل را نیز به دست آوریم.
۲. سیستم LTI زیر را در نظر بگیرید:

$$|H(f)| = \begin{cases} \sqrt{1 + 4\pi^2 f^2} & |f| < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$X(t)$  یک سیگنال ورودی WSS با میانگین صفر است که برای آن داریم:  $R_x(\tau) = e^{-|\tau|}$  اگر  $Y(t)$  خروجی سیستم برای این سیگنال باشد، مطلوبات زیر را محاسبه کنید:

$$\begin{aligned} & \mu_Y(t) \text{ (نمره ۳) } \bar{A} \\ & R_Y(\tau) \text{ (نمره ۴) } \bar{B} \\ & E[Y(t)^2] \text{ (نمره ۳) } \bar{C} \end{aligned}$$

(برای این سوال می‌توانید از جدول تبدیلات فوریه موجود در منبع مجاز اول استفاده کنید.)

۳. یک مرکز پستی در هر روز کاری ۸ ساعت فعالیت دارد. خروج پستی‌های این مرکز یک فرایند پواسون با نرخ ۱۰ پستی بر ساعت است. تعداد بسته‌هایی که پستی‌ها حمل می‌کنند مستقل از بقیه و حداکثر سه بسته است و هیچ پستی‌ای بدون بسته خارج نمی‌شود. احتمال اینکه پستی یک یا دو بسته داشته باشد به ترتیب 0.6 و 0.3 است.

(۶ نمره) احتمال اینکه در طی ۹ روز کاری حداقل ۹۵۰ بسته از این مرکز خارج شود را محاسبه کنید.

$$\text{راهنمایی: } P(X \geq a) \simeq P(N(0, 1) \geq \frac{a - E[X]}{\sigma(X)})$$

(۶ نمره) فرض کنید تا زمان  $t$  دقیقاً دو پستی خارج شده است. امیدریاضی شرطی را برای زمان هر دو وقوع بدست آورید ( $E[S_i | N_t = 2], i = 1, 2$ )

(برای این سوال می‌توانید از محاسبه‌گر تابع CDF توزیع نرمال موجود در منبع مجاز دوم استفاده کنید.)

۴. (۷ نمره) فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌های iid از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x | \theta) = \frac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}}, \quad 0 < \theta < \infty, 0 < x < \infty$$

یک آماره‌ی کافی برای  $\theta$  بیابید.

۵. برای توزیع گاما با PDF زیر

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{for } x > 0 \quad \alpha, \beta > 0$$

(۴ نمره) اگر  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  نشان دهید که تابع چگالی احتمال  $Y = \frac{1}{X}$  به صورت  $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{x}}$  است.

(۶ نمره) حال فرض کنید  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$  و اینکه  $\mu$  را می‌دانیم. اگر توزیع پیشین روی  $\sigma^2$  را از جنس توزیع بدست آمده در قسمت قبل (با پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$ ) در نظر بگیریم، توزیع پسین را محاسبه کنید.

۶. داده‌های  $X_1, \dots, X_n$  که نمونه‌های iid از توزیع  $U(0, \theta)$  ( $0 < \theta$ ) هستند، را در نظر بگیرید.

(۸ نمره) اگر آماره کافی کامل (CSS) موجود باشد، نشان دهید که  $T = X_{(n)}$  برای این مشاهدات یک آماره‌ی کافی کامل است، که در آن  $X_{(n)}$  برابر با مشاهده  $n$ ام در دنباله مرتب شده صعودی مشاهدات است.

(راهنمایی: طبق قضیه، می‌دانیم که اگر CSS موجود باشد، آنگاه آماره کافی کمینه (MSS)، کامل نیز هست. بنابراین کافی است نشان دهید که آماره معرفی شده، MSS است.)

(۱۵ نمره) اگر  $X_1, \dots, X_m$  و  $Y_1, \dots, Y_n$  نمونه‌های iid به ترتیب از توزیع‌های  $U(0, \theta)$  و  $U(0, \theta')$  باشند، اگر  $n > 1$  تخمین‌گر UMVU را برای  $\theta/\theta'$  بیابید.

۷. ماشینی داریم که رشته‌ای به شکل خاص تولید می‌کند. به این ترتیب که در هر مرحله یکی از دو حرف  $A$  یا  $B$  را بیرون می‌دهد و در نهایت رشته‌ای به شکل توالی تعدادی  $A$  و  $B$  پشت سر هم به صورت  $A^{k_1} B^{k_2} \dots A^{k_{n-1}} B^{k_n}$  ایجاد می‌کند.  $k_i$  طول هر کدام از حروف است و با احتمال‌های برابر یکی از مقادیر ۱، ۲ یا ۳ را دارد.

(۷ نمره) سعی کنید این ماشین را با یک HMM مدل کنید به طوری که مدل کمترین تعداد state ممکن را داشته باشد (لازم نیست این امر را اثبات کنید). سپس نمودار حالت بین state‌ها را بکشید و ماتریس‌های انتقال و انتشار را نیز مشخص کنید.

ب) (۷ نمره) اگر رشته‌ی خروجی لزوماً ۸ کاراکتر داشته باشد و به صورت  $A^{k_1} B^{4-k_1} A^{k_2} B^{4-k_2}$  باشد، نمودار حالات و ماتریس‌های خواسته شده را بنویسید. لزومی ندارد که تعداد حالات کمینه باشد.

ج) (۵ نمره - امتیازی) HMM با تعداد کمینه‌ی حالات برای قسمت ب را بدست آورید. (در صورتی که در بخش ب آن را نوشته‌اید نمره‌ی هر دو بخش به شما تعلق می‌گیرد.)

۸. واکسن جدیدی برای مبارزه با سویه‌ی اومیکرون ویروس کرونا تولید شده و برای آزمایش روی دو نمونه‌ی ۳۰ نفره‌ی مبتلایان به این سویه A و B مورد آزمایش قرار گرفته‌اند و به گروه اول (A) واکسن و به گروه B دارونما داده شده است. پس از گذشت دو هفته ۲۵ نفر و ۱۵ نفر به ترتیب از گروه A و B کاملاً بهبود یافتند. اگر درصد بهبود واقعی با واکسن و بدون واکسن را با  $\mu_a$  و  $\mu_b$  نشان دهیم و آن‌ها را طبق آزمایش با  $\hat{\mu}_a$  و  $\hat{\mu}_b$  تخمین بزنیم:

آ) (۵ نمره) متغیر تصادفی  $\mu_a - \mu_b$  از چه توزیعی پیروی می‌کند؟ توضیح دهید و پارامترهای آن را بر اساس تعاریف مسئله مشخص کنید.

ب) (۵ نمره) اگر بدانیم مقدار واریانس  $\mu_a - \mu_b$  برابر با 0.09 است، با توجه به داده‌های مساله و قسمت الف با استفاده از تست Z بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصد برای  $\mu_a - \mu_b$  را به دست آورید. آیا بازه وجود دارد؟ شهود خود از پاسختان را بنویسید.

ج) (۵ نمره - امتیازی) پاسخ قسمت قبل را با اجرای t-test به دست آورید.  
(برای این سوال می‌توانید از مقادیر مرجع Z-test و t-test موجود در منبع مجاز سوم و چهارم استفاده کنید.)