پاسخ تمرین ۱ :

۱) a : از آنجایی که b سطل داریم که هرکدام با احتمال مساوی یک توپ دریافت می‌کنند ، احتمال برابر $\frac{1}{b}$ است

b : با توجه به خطی بودن امید و اینکه n توپ پرتاب شده اند و با توجه به جواب قسمت قبل پاسخ $\frac{n}{b}$ است

c : چون $b \ll n$ می‌توان تصور کرد که تعداد توپ‌ها ∞ است ، به پرتاب توپ‌ها تا زمانی که سطل مورد نظر یک توپ داشته باشد ادامه می‌دهیم . تعداد پرتاب‌ها دارای توزیع هندسی با $p = \frac{1}{b}$ خواهد بود .
با توجه به قسمت a بنابراین امید برابر b خواهد بود .

d : دوباره فرض می‌کنیم تعداد توپ‌ها ∞ است و تا زمانی به پرتاب ادامه می‌دهیم که هر سطل حداقل یک توپ داشته باشد . X_i تعداد پرتاب‌های لازم بعد از i سطل پر شده است ؛ تا زمانی که سطل بعدی پر شود را نشان می‌دهد .

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} X_i$$

بعد از i سطل که پر شود سطل بعدی با احتمال $\frac{b-i}{b}$ پر می‌شود . X_i یک توزیع هندسی با پارامتر $\frac{b-i}{b}$ می‌باشد

$$E(X) = b \sum_{i=1}^{b} \frac{1}{i}$$

۲) a :

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \frac{4}{3}$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{3}{4}$$

$$f_X(x) = \int_0^{1-x^2} \frac{3}{4}\,dy = \frac{3}{4}(1-x^2) = \frac{-3x^2}{4} + \frac{3}{4} \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{4}\sqrt{1-y} + \frac{3}{4}\sqrt{1-y} = \frac{3}{2}\sqrt{1-y} \qquad 0 \leq y \leq 1$$

(b

$$f_{X|Y} = \frac{3/4}{3\sqrt{1-y}/2} = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$f_{Y|X} = \frac{3/4}{-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{1-x^2} \qquad 0 \leq y \leq 1$$

۳) a:

$$E[E(X|Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y]\, f_y(y)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x|y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\, dx\, dy = E[x]$$

b:

$$E[\mathrm{var}(X|Y)] = E[E(x^2|Y) - E(X|Y)^2]$$

$$= E[E[x^2|Y]] - E[E[X|Y]^2]$$

$$= E[x^2] - E[(E(x|y))^2]$$

$$\mathrm{var}[E[X|Y]] = E[(E(X|Y))^2] - (E[E(X|Y)])^2$$

$$= E[(E(X|Y))^2] - E[X]^2$$

$$\Rightarrow E[\mathrm{var}(X|Y)] + \mathrm{var}[E[X|Y]] = E[x^2] - E[x]^2 = \mathrm{var}(x)$$

۴) باید تابع h را بیابیم که $E[(x-h(y))^2]$ را کمینه کند

$$E[(x-h(y))^2] = E_y[E_x[(x-h(y))^2 | Y=y]]$$

$$= \int_y\int_x (x-h(y))^2 f_{X|Y}(X|Y=y)\, dx\, f_y(y)\, dy$$

در انتگرال داخلی y ثابت است و h نیز به گونه ای باید تعیین شود که مقدار انتگرال درونی به ازای هر y کمینه شود.

$$h = \underset{h}{\mathrm{argmin}} \int_x (x-h(y))^2 f_{X|Y}(X|Y=y)\, dx$$

چون y ثابت است پس $h(y)$ نیز ثابت است و نسبت به آن می‌توان مشتق گرفت تا عبارت کمینه شود.

$$\frac{\partial}{\partial h(y)} \int_x (x - h(y))^2 f_{X|Y}(x|Y=y)\,dx$$

$$= \int_x 2(x-h(y)) f_{X|Y}(x|y)\,dx = 0$$

$$h(y) \int \underbrace{f_{X|Y}(x|y)\,dx}_{1} = \int x f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

$$= E(X|Y=y)$$

$$\Rightarrow h(y) = E[X|Y=y]$$

(۶

a. $E[Y] = E[E[Y|X]] = E[nX] = n/2$

$$\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[E[Y|X]] + E[\mathrm{var}[Y|X]]$$

$$= \mathrm{Var}(nX) + E[nX(1-X)] = \frac{n^2}{12} + \frac{n}{6}$$

b. $f_{XY}(Y=y, x) = \binom{n}{y} x^y (1-x)^{n-y}$ $\quad y=0,\dots,n \quad 0<x<1$

$$P(Y=y) = \int_0^1 \binom{n}{y} x^y (1-x)^{n-y}\,dx$$

Scanned with CamScanner

۵)

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right\}\right]$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(w^2-2\rho wz+z^2)}\sigma_y\,dz$$

$z = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$ $\quad dy = \sigma_y dz$ $\quad w = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{w^2}{2(1-\rho^2)}}}{2\pi\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(z^2-2\rho wz+\rho^2w^2)-\rho^2w^2\right]}dz$$

$$= \frac{e^{-\frac{w^2}{2(1-\rho^2)}}\, e^{\frac{\rho^2w^2}{2(1-\rho^2)}}}{2\pi\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(z-\rho w)^2}dz$$

normal $\sigma^2 = 1-\rho^2$ $\quad \mu = \rho w$

$\Rightarrow$ حاصل انتگرال $\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}$

$$e^{-\frac{w^2}{2(1-\rho^2)}}\, e^{\frac{\rho^2w^2}{2(1-\rho^2)}} = e^{-\frac{w^2}{2}} \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}$$

b)

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\rho^2\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\left(y-\mu_y-\left(\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\right)\right)^2} \Rightarrow N\left(\mu_y - \rho\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)(x-\mu_x),\ \sigma_y^2(1-\rho^2)\right)$$

c) $E(aX+bY) = aE(X) + b(E(Y)) = a\mu_x + b\mu_y$ $\qquad var(aX+bY) = a^2Var(X) + b^2(var(Y)) + 2ab\,Cov(X,Y)$

$= a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_y$ $\qquad |J(u,v)| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a}$

$U = aX+bY \qquad V = Y \qquad x = \frac{1}{a}(u-bv) \quad y = v$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{2\pi a\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left[\frac{1}{a}(u-bv)\right]^2 - 2\frac{\rho}{a}(u-bv)v + v^2\right]}$$

حالا از توان فاکتورگیری می‌کنیم تا یک مربع را پیدا کنیم

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{b^2+2\rho ab+a^2}{a^2}\right]\left[\frac{u^2}{b^2+2\rho ab+a^2} - 2\left(\frac{b+a\rho}{b^2+2\rho ab+a^2}\right)uv + v^2\right]$$

که این یک نرمال دو متغیره است

$$\rho^* = \frac{Cov(U,V)}{\sigma_u\sigma_v} = \frac{E(aXY+bY^2)}{\sigma_u\sigma_v} = \frac{a\rho+b}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\rho}} \qquad (1-\rho^{*2}) = \frac{(1-\rho^2)a^2}{\sigma_u^2}$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v\sqrt{1-\rho^{*2}}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^{*2})}\left(\frac{u^2}{\sigma_u^2} - 2\rho\frac{uv}{\sigma_u\sigma_v} + \frac{v^2}{\sigma_v^2}\right)\right]$$

$\mu_u = \mu_v = 0$

$\sigma_v^2 = 1 \quad \sigma_u^2 = a^2+b^2+2ab\rho$

پس U یک نرمال است