



## فرایندهای تصادفی

نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲  
دکتر ربیعی

زمان تحویل: ۲۵ مهر

مروری بر مباحث احتمال

تمرین اول

۱. فرض کنید  $n$  توپ به سمت  $b$  سطل پرتاب می شوند به طوری که هر توپ با احتمال مساوی در یکی از سطل ها می افتد و پرتاب ها مستقل از یک دیگر می باشند.  
 (آ) احتمال این که یک توپ خاص در یک سطل مشخص بیفتد چقدر است؟  
 (ب) امید ریاضی تعداد توپ های فرود آمده در یک سطل مشخص چقدر است؟  
 (پ) امید ریاضی تعداد توپ های پرتاب شده تا زمانی که یک سطل مشخص یک توپ داشته باشد، چقدر است؟  
 (ت) امید ریاضی تعداد توپ های پرتاب شده تا زمانی که همه ی سطل ها یک توپ داشته باشند، چقدر است؟  
 در دو قسمت اخیر فرض کنید که  $n \gg b$  است.
۲. فرض کنید که  $(X, Y)$  دارای توزیع یکنواخت در ناحیه ی  $0 \leq y \leq 1 - x$  و  $-1 \leq x \leq 1$  باشد،  
 (آ) توزیع حاشیه ای  $X$  و  $Y$  را به دست آورید.  
 (ب) دو توزیع شرطی  $f_{X|Y}(x|y)$  و  $f_{Y|X}(y|x)$  را پیدا کنید.
۳. برای هر دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  نشان دهید:  

$$E[E[X|Y]] = E[X]$$
 (آ)  

$$var(X) = E[var(X|Y)] + var(E[X|Y])$$
 (ب)
۴. فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیر تصادفی باشند. نشان دهید که تابع  $h$  که مقدار  $E[(X - h(Y))^2]$  را کمینه می کند، به صورت زیر به دست می آید:  

$$h(y) = E[X|Y = y]$$
  
 فرض کنید که  $E[X^2] < \infty$  باشد.
۵. فرض کنید متغیر تصادفی  $Y$  توزیعی دوجمله ای با  $n$  آزمایش و احتمال موفقیت  $X$  دارد، که در آن  $n$  یک جمله ی ثابت و  $X$  یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین  $0$  و  $1$  است. موارد خواسته شده را بیابید:  
 $E(Y)$  و  $var(Y)$   
 (ب) توزیع توأم  $X$  و  $Y$
۶. فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی با توزیع توأم نرمال دو بعدی با پارامترهای  $(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$  باشند، توزیع های زیر را به دست آورید:  
 (آ) توزیع حاشیه ای  $X$  (*marginal*) و توزیع حاشیه ای  $Y$   
 (ب) توزیع شرطی  $Y$  به شرط  $X = x$   
 (پ) به ازای مقادیر ثابت  $a$  و  $b$ ، توزیع  $aX + bY$