۱) فرآیند $X[n] = \sin(un)$ را در نظر بگیرید و u یک $R.V$ مقادیر یکنواخت در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ می‌باشد. WSS بودن $X[n]$ را بررسی کنید.

WSS دو شرط را دارد:

$$\begin{cases} E[X(t)] = \text{constant} = \text{ثابت باشد} \\ R_X(\tau) = R_X(t_1, t_2) \end{cases}$$

$\tau = t_1 - t_2$ فقط — تابع اختلاف زمان باشد

$$E[\sin(u)] = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin(un)\,du = 0$$

شرط اول برقرار بود!

بررسی شرط ۲

$$E[X(n) \cdot X(n+m)] = \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$E\left[\frac{1}{2}\cos(um) - \frac{1}{2}\cos(u(2n+m))\right]$$

عدد صحیح است

$$= E\left[\frac{1}{2}\cos(um)\right] - \frac{1}{2}E[\cos u(2n+m)] = 0 - 0 = 0$$

مستقل از n است پس فرآیند یک فرآیند WSS است.

۲) فرآیند تصادفی مختلط $x(t) = Ae^{j\omega t}$ در نظر بگیرید که A یک $R.V$ گاوسی با میانگین μ و واریانس σ^2 است و ω یک ثابت است. شرط لازم و کافی برای WSS بودن این فرآیند؟

$$R_{xx}(t, s) = E[X(t)X^*(s)]$$

① ثابت بودن میانگین، شرط ۱: $E[Ae^{j\omega t}] = e^{j\omega t} E[A]$ نباید به t وابسته باشد

$\Rightarrow E[A] \rightarrow$ باید صفر باشد

② $R_X(t, t-\tau) = E[X(t)X^*(t-\tau)] = E[Ae^{j\omega t} \cdot Ae^{-j\omega(t-\tau)}]$

$= e^{j\omega t} E[A^2] \rightarrow$ وابسته به τ است

چون $\mu = 0$ اینها برابر Var است.

۲) متغیرهای تصادفی $w_0, w_1, \dots$ uncorrelated هستند با میانگین $E[w_n]=\mu$ و واریانس $var[w_n]=\sigma^2$ به ازای $n \geq 0$ است برای یک k مثبت فرآیند تصادفی زیر را تعریف می‌کنیم آیا فرآیند WSS است؟

$$x[n] = \frac{w_n + w_{n-1} + \dots + w_{n-k}}{k+1}$$

① شرط اول $= \frac{1}{k+1} E[w_n + w_{n-1} + \dots + w_{n-k}]$

$= \frac{1}{k+1}\left(E[w_n] + E[w_{n-1}] + \dots E[n-k]\right) = \frac{1}{k+1}(\mu \times k+1) = \mu$ برقراره

$$C_x(\tau) = R_x(\tau) - \mu^2 \rightarrow R_x(\tau) = \mu^2 + C_x(\tau)$$

$$cov(w_i, w_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sigma^2 & i = j \end{cases} \rightarrow$$ طبق تعریف

$$C_x(n, n+m) = cov\left(\frac{1}{k+1}(w_n + w_{n-1} + \dots + w_{n-k}), \frac{1}{k}(w_{n+m}, \dots, w_{n+m-k}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(k+1)^2} = (k+1-m)\sigma^2 & 0 \leq m \leq k \\ 0 & m > k \end{cases}$$

۴) فرآیند تصادفی x_k ، $k \geq 1$ به صورت $x_k = z_{k+1} + z_k$ که متغیر تصادفی z_k ، $k \geq 1$ مستقل درحال با توزیع یکسان $N(0,1)$ هستند و z_i ها iid هستند.

a) $E[X_k]$

x, y joint gaussian $\Leftrightarrow$: $ax+by \Rightarrow$ نرمال

$\Rightarrow x \Rightarrow$ noral $\quad y \sim$ normal
$a=1 \; b=0 \qquad a=0 \; b=1$

$E[X_k] = E[Z_k + Z_{k+1}] = E[Z_k] + E[Z_{k+1}] = 0$

$=$ ط) توزیع احتمال $f_{X_k}(x)$ را بدست بیارید.

Z_{k+1} و Z_k هر دو نرمال هستند و نشد که نرمال اند و بر عکس

$x_k \rightarrow$ نرمال $\rightarrow x_k \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $\quad E[X_k]=0$
در قسمت قبل بدست آوردیم

$var(Z_k + Z_{k+1}) = \underbrace{var(Z_k)}_{1} + \underbrace{var(Z_k+1)}_{1} = 2$

$\Rightarrow f_{X_k}(x) \sim N(0, 2)$

$R_{XX}[m,n]$ (c

$$E[X_n X_m] = \begin{cases} 2 = \overbrace{2 \times 1}^{2\,var} & n=m \\ 1 = var \quad |n-m|=1 \\ 0 & ow \end{cases}$$

$E[X_n X_m] = E[Z_{m+1} Z_{n+1}] + E[Z_{m+1} Z_n]$
$+ E[Z_m Z_{n+1}] + E[Z_m Z_n]$