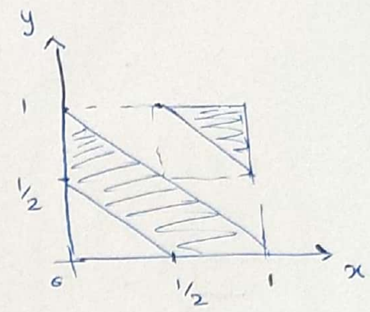
① a pair of jointly Continuos random var, X and Y have a joint propability density Function given by:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C, & \text{Shaded region} \\ 0 & \text{oth} \end{cases}$$




a) Find c $\quad C=2$

b) find the marginal pdfs of X and Y, $f_X(x), f_Y(y) = 1$

c) find $E[X|Y=1/4]$ and $var[X|Y=1/4]$

d) Find Conditional pdf for X given that $Y=3/4$ $(f_{X|Y}(x|3/4))$

c: $E[X|Y=1/4] = \int_0^1 f(x,1/4)\, x\, dx = \int_{1/4}^{3/4} 2x\, dx = x^2\Big|_{1/4}^{3/4} = 8/16 = 1/2$

$E[X^2|Y=1/4] = \int_{1/4}^{3/4} 2x^2\, dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_{1/4}^{3/4} = 13/48$

$Var[X|Y=1/4] = \frac{13}{48} - \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$

d: $f_{X|Y}(x|3/4) = \frac{f(x,3/4)}{\cancel{f_Y(3/4)}\ 1} = \begin{cases} 0 & 1/4 \leq x \leq 3/4 \\ C=2 & \text{oth} \end{cases}$

② X is a random var with CDF F(x):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x+1/2 & 0 \leq x < 1/2 \\ 1 & x \geq 1/2 \end{cases}$$

a) find $P(0<X<1/4) = F(1/4) - F(0) = 1/4$

b) find $P(X=0) = F(0) - F(0^-) = 1/2$

c) Find $P(0 \leq X \leq 1/4) = F(1/4) - F(0^-) = 3/4$

③ X, Y are random variables:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{2e^{-2x}}{x} & 0 \le x < \infty,\ 0 \le y < x \\ 0 & \text{oth} \end{cases}$$

a) find $Cov(X,Y)$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ $\qquad f_X(x) = \int_0^x \frac{2e^{-2x}}{x} dy = 2e^{-2x}$

$$E[x] = \int_0^\infty \underset{u}{2x} \underbrace{e^{-2x} dx}_{dv} = 2\left(x \times -\tfrac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^\infty - 2\int_0^\infty -\tfrac{1}{2}e^{-2x} dx$$

$$= -\tfrac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^\infty = \tfrac{1}{2}$$

$$E[Y] = \int_0^\infty \int_y^\infty 2y \frac{e^{-2x}}{x} dx\, dy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^x \frac{2ye^{-2x}}{x} dy\, dx = \int_0^\infty \frac{y^2 e^{-2x}}{x}\Big|_0^x dx = \int_0^\infty xe^{-2x} dx = \tfrac{1}{4}$$

$$E[XY] = \int_0^\infty \int_0^x xy \frac{2e^{-2x}}{x} dy\, dx$$

$$= \int_0^\infty \int_0^x 2ye^{-2x} dy\, dx = \int_0^\infty y^2 e^{-2x}\Big|_0^x dx = \int_0^\infty x^2 e^{-2x} dx$$

$$= \tfrac{1}{4}$$

$\rightarrow Cov = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8}$

(4)

n توپ، b سطل پرتاب می‌شوند بطوریکه هر توپ با احتمال مساوی در یکی از سطل‌ها می‌افتد و پرتاب‌ها مستقل از یکدیگر هستند. $(n \gg b)$

۱) احتمال این که یک توپ خاص در یک سطل مشخص بنشیند چقدر است؟ $\frac{1}{b}$

۲) امید ریاضی تعداد توپ‌های فرود آمده در یک سطل مشخص چقدر است؟ $n/b$

۳) امید ریاضی تعداد توپ‌های پرتاب شده تا زمانی که یک سطل مشخص یک توپ داشته باشد چقدر است؟

توزیع هندسی $P_X(k) = (1-p)^{k-1} p$

$$p = 1/b$$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

$$= p\left(1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \dots\right)$$

$$= p\left(\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} (1-p)^{k-1} + \dots\right)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} = \frac{1}{1-r}\right)$$

$$= p\left(\frac{1}{1-(1-p)} + \frac{1-p}{1-(1-p)} + \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)} + \dots\right)$$

$$= 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{1-(1-p)} = 1/p$$

۴) امید ریاضی تعداد توپ‌های پرتاب شده تا زمانی که همه سطل‌ها یک توپ داشته باشند چقدر است؟

$X_i$: تعداد پرتاب‌های لازم بعد از اینکه i امین سطل پر شده تا زمانی که سطل بعدی پر شود $\qquad X = \sum_{i=1}^{b} X_i$

بعد از i امین سطل پر شود سطل بعدی با احتمال $\frac{b-i}{b}$ پر می‌شود $\leftarrow$ $X_i$: توزیع هندسی با پارامتر $\frac{b-i}{b}$

$$\longrightarrow E[X] = b \sum_{i=1}^{b} 1/i$$

(5) we have a coin with a prob of 0,1 head and 0,9 tail

if we throw this coin 100 times

a) using markov's ineq, Show that the Prob of a head falling at least 20 times is max 0,5.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر شیر بیاید } (i) \\ 0 & \text{اگر خط بیاید } (i) \end{cases} \qquad X = X_1 + \cdots + X_{100}$$

نامساوی مارکوف $P[X \geq a] \leq \frac{E[X]}{a}$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right] = \sum_{i=1}^{100} [E(X_i)] = 100\left(\tfrac{1}{10} \times 1 + \tfrac{9}{10} \times 0\right) = 10$$

$$\rightarrow P[X \geq 20] \leq \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

b) using chebyshev ineq, Show that the Prob of a head falling at least 20 times is 0,09.

$$P[|X - M_X| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$$

$$P[X \geq 20] = P[X - \overset{10}{M_X} \geq 10] = P[X - M_X \geq 10] + \underbrace{P[X - M_X < -10]}_{0}$$

$$X \geq 0 \rightarrow X - 10 \geq -10 \rightarrow P[X - 10 \leq -10] = 0$$

$$= P[|X - M_X| \geq 10] \leq \frac{\sigma_X^2}{100}$$

$$\text{var}[X] = \text{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \text{var}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} (E(X_i^2) - E(X_i)^2)$$

$$= 100\left(\tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{100}\right) = 9$$

$$\rightarrow P[|X - M_X| \geq 10] < \frac{9}{100}$$