تمرین سری ۴ ام :

۱) a)

$$\eta_y = \eta_x H(0) = 0$$

$$S_{yy} = S_{xx} \cdot |H(\omega)|^2 = 2\,\frac{\frac{2}{\alpha}}{(\frac{1}{\alpha})^2+\omega^2} \times \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\left(e^{-2j\omega} + e^{2j\omega}\right)\right)$$

$$= \frac{\frac{5}{\alpha}}{(\frac{1}{\alpha})^2+\omega^2} + \frac{\frac{2}{\alpha}}{(\frac{1}{\alpha})^2+\omega^2}\left(e^{-2j\omega} + e^{2j\omega}\right)$$

$$\rightarrow R_{yy} = \cancel{4}\,F^{-1}\left(\frac{\frac{5}{\alpha}}{(\frac{1}{\alpha})^2+\omega^2}\right) + F^{-1}\left(\frac{\frac{2}{\alpha}}{(\frac{1}{\alpha})^2+\omega^2}\right)(t-2) + F^{-1}\left(\frac{\frac{2}{\alpha}}{(\frac{1}{\alpha})^2+\omega^2}\right)(t+2)$$

$$= \cancel{\alpha}\,\frac{5}{4} e^{-\frac{|\tau|}{\alpha}} + e^{-\frac{|\tau-2|}{\alpha}} + e^{-\frac{|\tau+2|}{\alpha}}$$

b) سیستم LTI خطی است. در نتیجه یک فرآیند گاوسی را به یک فرآیند گاوسی تبدیل می کند.

۲) a)

a) $K_1 + K_2 = \phi_1^T(x)\phi_1(y) + \phi_2^T(\cancel{x})\phi_2(y)$

$$\phi' = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \rightarrow \phi'^T(x)\phi'(y) = \phi_1^T(x)\phi_1(y) + \phi_2^T(x)\phi_2(y) = K_1 + K_2$$

b)

b) $K_1 K_2 = (\phi_1^T(x)\phi_1(y))(\phi_2^T(x)\phi_2(y))$

$$= \left(\sum \phi_1^{(i)}(x)\,\phi_1^{(i)}(y)\right)\left(\sum \phi_2^{(i)}(x)\,\phi_2^{(i)}(y)\right)$$

$$= \sum_{i,j} \phi_1^{(i)}(x)\phi_1^{(i)}(y)\phi_2^{(j)}(x)\phi_2^{(j)}(y)$$

$$= \sum_{i,j} \left(\phi_1^{(i)}(x)\phi_2^{(j)}(x)\right)\left(\phi_1^{(i)}(y)\phi_2^{(j)}(y)\right)$$

$$\rightarrow \phi'(x) = \left[\phi_1^{(i)} \times \phi_2^{(j)}\right]_{i,j}$$

(c

$$e^{K_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_1^n}{n!}$$

K_1 کرنل $\xrightarrow{(b)}$ K_1^n کرنل $\rightarrow$ $\frac{K_1^n}{n!}$ کرنل $\xrightarrow{(a)}$ $\sum \frac{K_1^n}{n!}$ کرنل

(۳ (a

$$\mathrm{cov}(N(t), N(t+T)) = \mathrm{cov}\left(N(t), \left(N(t) + N(t, t+T)\right)\right)$$

$$= \mathrm{cov}(N(t), N(t)) + \underbrace{\mathrm{cov}(N(t), N(t, t+T))}_{\text{مستقل}}$$

$$= \mathrm{var}(N(t)) = \lambda t$$

خیر، زیرا تابع auto-covariance به t_2 وابسته است

(b

$$P(N(t_1)=k, N(t_2)=j) = P(N(t_1)=k, N(t_1, t_2)=j-k)$$

$$= P(N(t_1)=k)\, P(N(t_1, t_2)=j-k) = e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda(t_2-t_1)}\frac{(\lambda(t_2-t_1))^{j-k}}{(j-k)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t_2} \lambda^{j} t_1^{k} (t_2-t_1)^{j-k}}{k!\,(j-k)!} \qquad j \geq k \,, \text{o.w. } 0$$

(c

$$P(t_0 = a_0, \dots, t_n = a_n) = \frac{e^{-\lambda t_n} \lambda^{a_n} t_0^{a_0} (t_1-t_0)^{a_1-a_0} \cdots (t_n-t_{n-1})^{a_n-a_{n-1}}}{(a_0)!\,(a_1-a_0)! \cdots (a_n-a_{n-1})!}$$

(d

$$f(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a+kn)$$

$$= n^{a_n} = n^{kn}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(a+kn)} \lambda^{a+kn} \cdot t_0^{a} \; n^{a_1-a} n^{a_2-a_1} \cdots n^{a_n-a_{n-1}}}{a!\,(a_1-a)!\,(a_2-a_1)! \cdots (a_n-a_{n-1})!}$$

اگر قرار دهیم:

$$r_i = a_i - a_{i-1}$$
$$(a_0 = a)$$

$$\to f(a, \dots, a+kn) = c \cdot a \times \frac{1}{r_1! \cdots r_n!} = \frac{c}{(r_1+\dots+r_n)!} \binom{\sum r_i}{r_1, \dots, r_n}$$

$$= \frac{c}{(kn)!} \cdot \binom{kn}{r_1, \dots, r_n} \qquad \text{s.t.}: r_1+\dots+r_n = kn$$

که این هم به ازای $r_i = n$ ماکسیمم می‌شود.

$$\to a_i = a + in$$

(e

$$P(N(۴)<۳,\; N(۵)-N(۳)>۳)$$

$$= P(N(۴)=۰,\; N(۴,۵) \geq ۴)$$
$$+ P(N(۴)=۱,\; N(۴,۵) \geq ۴) + P(N(۴)=۲,\; N(۳,۵) \geq ۴)$$

Scanned with CamScanner

$$= P(N(4)=0) \times P(N(4,5) \geq 4) + P(N(3)=0) P(N(3,4)=1) \times P(N(4,5) \geq 3) + P(N(3)=1) P(N(3,4)=0) \times P(N(4,5) \geq 4)$$

$$+ P(N(3)=0) P(N(3,4)=2) P(N(4,5) \geq 2)$$
$$+ P(N(3)=1) P(N(3,4)=1) P(N(4,5) \geq 3)$$
$$+ P(N(3)=2) P(N(3,4)=0) P(N(4,5) \geq 4)$$

٤-

a) $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = ?$

$$\mathrm{var}(X_t + X_s) = \mathrm{var}(X_t) + \mathrm{var}(X_s) + 2\,\mathrm{cov}(X_t, X_s)$$

$$X_t + X_s \sim N(0, \sqrt{|t-s|})$$

$$\rightarrow 2X_t \sim N(0, 0) \longrightarrow X_t \approx \tfrac{1}{2}\delta(0)$$

$$\rightarrow \sqrt{|t-s|} = 0 + 0 + 2\,\mathrm{cov}(X_t, X_s) \rightarrow R(s,t) = \mathrm{cov}(X_t, X_s) = \frac{1}{2}\sqrt{|t-s|}$$

b) کلیه توزیع گاوسی است با ماتریس کوواریانس

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{2}\sqrt{|t_j - t_i|}$$

و میانگین $\mu = 0$

$t \neq s$:

$$var(X_t - X_s) = var(X_t) + var(X_s) - 2cov(X_t, X_s) \quad (c$$

$$= 0 + 0 - 2 \times \frac{1}{2}\sqrt{|t-s|} = -\sqrt{|t-s|} \overset{t \neq s}{<} 0$$

که این تناقض است زیرا var همیشه مثبت یا صفر است در نتیجه چنین فرآیندی وجود ندارد.

(5

(a

$T_i \to$ maintenanc times

$$P(T_1 > h) = e^{-\mu h}$$

(b X ← زمان اولین breakdown

$$E[X] = E[X \mid T_1 > h] P(T_1 > h) + E[X \mid T_1 \leq h] P(T_1 \leq h)$$

$$= h\, e^{-\lambda h} + \left(E[T_1 \mid T_1 \leq h] + E[X]\right)\left(1 - e^{-\mu h}\right)$$

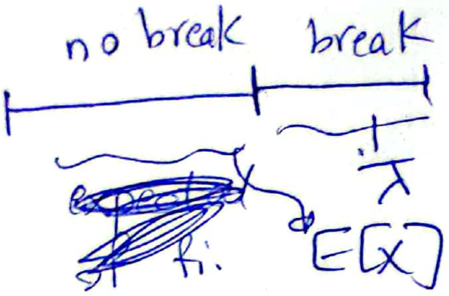
$$\to E[X] = h + (e^{\mu h} - 1)\underbrace{E[T_1 \mid T_1 \leq h]}_{h/2}$$

$$= h + \frac{h}{2}(e^{\mu h} - 1)$$

Scanned with CamScanner

c)

(صفحه ۲۰)



$\rightarrow$ break proportion

$$= \frac{\lambda}{\lambda + E[X]}$$

که $E[X]$ در قسمت قبلی محاسبه شد.

۶- به طور میانگین $\frac{1}{\lambda_1}$ طول می‌کشد تا ماشین قبلی از ایستگاه اول خارج شود. سپس به اندازه $\max(exp(\lambda_1), exp(\lambda_2))$ طول می‌کشد. پس از آن که به ایستگاه دوم رسیدیم به اندازه‌ی $\frac{1}{\lambda_2}$ طول می‌کشد تا از دومی هم خارج شویم.

$$\rightarrow \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2}$$

$$= 2\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

۷- a)

G_t: فاصله تا نزدیک‌ترین event قبلی

D_t: فاصله تا نزدیک‌ترین event بعدی

$P(G_t < x, D_t < y)$

تا x تا قبلی و همچنین تا y تا بعدی event ها رخ داده باشد.

= تعداد event ها در لحظه‌ی $t-x$ تا t و در لحظه‌ی t تا $t+y$ از صفر بیشتر باشد.

$$= (N_{t-x} < N_t < N_{t+y}) =$$

$$\rightarrow P(G_t < x, D_t \le y) = P(N(t-x,t) \ge 1)$$

$$\times P(N(t,t+y) \ge 1)$$

$$= (1-e^{-\lambda x})(1-e^{-\lambda y})$$

b) ~~[illegible]~~ $G_t = t$ یعنی فاصله تا event قبلی t باشد

یعنی در بازه $(0,t)$ eventی رخ ندهد.

$$\rightarrow P(G_t = t, D_t \le y) = (N_t = 0, N_{t+y} > 0)$$

$$= (N(t) = 0, N(t,t+y) \ge 1)$$

$$\rightarrow P(G_t = t, D_t \le y) = P(N(t) = 0)\, P(N(t,t+y) \ge 1)$$

$$= e^{-\lambda t} \times (1 - e^{-\lambda y})$$

c) ~~$P(D_t \le y) = \ldots$~~ $P(G_t \le t, D_t \le y)$

~~$= (1-e^{-\lambda t})(1-e^{-\lambda y})$~~ ~~$\rightarrow D_t \sim$ exponential~~

~~$P(G_t < x)$~~

(c

$$\Rightarrow P(D_t \leq y) = P(G_t = t, D_t \leq y) + P(G_t < t, D_t \leq y)$$

$$= e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda y}) + (1-e^{-\lambda t})(1-e^{-\lambda y})$$

$$= 1-e^{-\lambda y}$$

$\rightarrow D_t \sim$ exponential (λ)

(d

$$P(G_t < x, D_t \leq y) = (1-e^{-\lambda x})(1-e^{-\lambda y})$$

$\rightarrow P(G_t < x) =$ ← $\boxed{x \leq t}$

$$\lim_{y \to \infty} P(G_t < x, D_t \leq y) = (1-e^{-\lambda x})$$

$$\rightarrow P(G_t = x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x < t \\ e^{-\lambda t} & x = t \\ 0 & x > t \end{cases}$$

$x > t$: $P(G_t < x) = 1$

(e

$P(\min(T_1, t) \geq x)$

$P(\min(T_1, t) > x) = 0 \quad \min(T_1, t) \leq t \leq x$: $x \geq t$ اگر

$P(\min(T_1, t) > x) = P(T_1 > x) = e^{-\lambda x}$: $x < t$ اگر

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow P(\min(T_1,t)<x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & x<t \\ 1 & x\geq t \end{cases}$$

که همان رابطه ای است که برای G_t داشتیم

f) $P(G_t<x, D_t\leq y) = \cancel{(1-e^{-\lambda x})(1-e^{-\lambda y})}$

$$\underbrace{(1-e^{-\lambda y})}_{f(y)}\underbrace{\left(\mathbb{1}[x\leq t](1-e^{-\lambda x}) + \mathbb{1}[x>t]\right)}_{f(x)}$$

$$= f(y)\times f(x)$$

به صورت ضرب دو تابع که یکی فقط به x و یکی فقط به y بستگی دارد نوشتیم. پس مستقل هستند.

g) $E[G_t] = \int_0^{+\infty} P(G_t\geq x)\,dx = \int_0^{+\infty}(1-P(G_t<x))\,dx$

$$= \int_0^{t}(1-(1-e^{-\lambda x})) + \int_t^{+\infty}(1-1)\,dx$$

$$= \int_0^{t} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})$$

$$E[G_t+D_t] = \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}) + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}(2-e^{-\lambda t})$$

of exponential

D_t یک فضای تا بی‌نهایت را پوشش می‌دهد اما فضای G_t محدود $[0,t]$ را. هرچقدر t را زیادتر کنیم $1-e^{-\lambda t}$ زیادتر شده و $E[G_t+D_t]$ و $E[G_t]$ زیادتر می‌شوند.

$$\Rightarrow \frac{E[G_t]}{E[G_t+D_t]} = \frac{\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})}$$

در واقع G_t همان قسمت محدود شده‌ی D_t به زمان t است. $t\to\infty$ ، G_t همان D_t می‌شود و تفاوت آن در امید ریاضی با یک فرمول نهایی مشخص می‌شود.

Scanned with CamScanner