In the name of GOD.
Sharif University of Technology
Stochastic Processes CE 695 Fall 2022 H.R. Rabiee

Homework 1 (Review of Probability)

.۱ .

(آ) .

با توجه به این که p از توزیع یکنواخت بازه ۰ تا ۱ پیروی می‌کند پس خواهیم داشت:

$$P(h,h,h,h,h) = \int_۰^۱ P_p(h,h,h,h,h) \times f(U_{[۰,۱]} = p)d_p = \int_۰^۱ p^۵ d_p = \frac{۱}{۶}$$

(ب) .

$$P(h|h,h,h,h) = \int_۰^۱ P_p(h|h,h,h,h) \times f(U_{[۰,۱]} = p)d_p = \int_۰^۱ \frac{P_p(h,h,h,h,h)}{P_p(h,h,h,h)} d_p = \int_۰^۱ \frac{p^۵}{p^۴} d_p = \frac{۱}{۲}$$

.۲ .

(آ) .

$$f_{X_۱|X_۱+X_۲}(x|۲) = \frac{f(X_۱=x, X_۲=۲-x)}{f(X_۱+X_۲=۲)} = \frac{\lambda_۱ e^{-\lambda_۱ x} \times \lambda_۲ e^{-\lambda_۲(۲-x)}}{\int_۰^۲ \lambda_۱ e^{-\lambda_۱ s} \times \lambda_۲ e^{-\lambda_۲(۲-s)} d_s} = \frac{e^{-\lambda_۱ x} \times e^{\lambda_۲ x}}{\int_۰^۲ e^{-\lambda_۱ s} \times e^{\lambda_۲ s} d_s} = \frac{e^{(\lambda_۲-\lambda_۱)x}}{\frac{۱-e^{۲(\lambda_۲-\lambda_۱)}}{\lambda_۱-\lambda_۲}} = \frac{(\lambda_۱-\lambda_۲)e^{(\lambda_۲-\lambda_۱)x}}{۱-e^{۲(\lambda_۲-\lambda_۱)}}$$

(ب) .

$$E[X_۱|X_۱+X_۲=۲] = \int_۰^۲ x f_{X_۱|X_۱+X_۲}(x|۲) d_x = \int_۰^۲ x \frac{(\lambda_۱-\lambda_۲)e^{(\lambda_۲-\lambda_۱)x}}{۱-e^{۲(\lambda_۲-\lambda_۱)}} = \frac{(\lambda_۱-\lambda_۲)}{۱-e^{۲(\lambda_۲-\lambda_۱)}} \int_۰^۲ x e^{(\lambda_۲-\lambda_۱)x} = \frac{۲(\lambda_۱-\lambda_۲)e^{-۲(\lambda_۱-\lambda_۲)}}{۱-e^{۲(\lambda_۲-\lambda_۱)}} - ۱$$

.۳ .

(آ) .

$$E[X] = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}E[X] \Rightarrow E[X] = ۳$$
$$P(X \geq ۶) \leq \frac{E[X]}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

(ب) .

$$P(X \leq ۹) \geq ۱ - \frac{E[X]}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

۴. .

ابتدا $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ را تعریف می‌کنیم. حال توجه کنید S_n متغیر تصادفی با توزیع پواسون و با پارامتر $\lambda = n$ است. پس خواهیم داشت:

$$P(S_n \leq n) = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-n} n^k}{k!}$$

اما از طرفی طبق قضیه حد مرکزی، داریم:

$$P(S_n \leq n) = P(\frac{(S_n - n)}{\sqrt{n}} \leq 0) \to P(Z \leq 0) = \frac{1}{2}$$

پس با کمک دو گزاره یاد شده خواهیم داشت:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-n} n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

۵. .

$$Var(Z|Y) = E[Z^2|Y] - E[Z|Y]^2 = Y^2 E[X^2|Y] - Y^2 E[X|Y]^2 = Y^2 Var(X|Y)$$

۶. .

(آ) .

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[X^3] - E[X]E[X^2] = 0 - 0 E[X^2] = 0$$

۷. .

برای هر عدد i ، متغیر تصادفی X_i را به عنوان شماره مرحله رخ دادن گوی شماره i تعریف می‌کنیم. حال توجه کنید:

$$E[X_i] = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}(1 + E[X_i]) = n$$

حال خواهیم داشت:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n^2$$

۸. .

می‌دانیم:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}, E[\bar{X}] = \mu, Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

پس با کمک نامساوی چبیشف خواهیم داشت:

$$P[|\bar{X} - \mu| > k\sigma] \leq \frac{1}{k^2 n} \to 0$$